透视及

其他投影图像构建的理论与实践

雅罗斯拉夫·谢尔盖耶维奇·沃罗日希夫

俄罗斯联邦文化部
圣彼得堡列宾美术学院

雅罗斯拉夫·谢尔盖耶维奇·沃罗日希夫

透视及其他投影图像构建的理论与实践

方法论指南

第一卷

圣彼得堡
2022

由圣彼得堡列宾美术学院编辑出版委员会决定出版

审稿人

沃洛希诺夫 丹尼斯 维亚切斯拉沃维奇

技术科学博士，

以教授米·亚·邦奇-布鲁耶维奇命名的圣彼

得堡国立电信大学

信息学和电脑设计教研室主任

翻译

李羽涵

封面图为汉斯·弗雷德曼·德·弗里斯

《透视图》一书中的插图，绘制于1604年

ISBN 978-5-903677-90-0

序言

本方法规则书为高等艺术学校艺术创作系学生编制。部分章节也适用于与实物绘图有关的其他专业的学生。

乍一看来，这似乎很奇怪，但是与工程师或建筑师相比，画家需要具备更广泛的图像理论知识。工程师主使用正交射影和轴测投影。此外，建筑师还必须能够进行透视投影、阴影、反射等绘图。

另外，画家还必须了解非线性透视、反透视与立体透视，熟悉光的反射与折射规律，不仅能绘制反射图，也要能绘制折射图、线性图与非线性图。

例如，如果最简单的静物画包含一个装有水的透明容器和一个带有曲面镜面的物体，则画家必须知道非线性的反射和折射的成像原理。

一名内行的画家还应理解光的分解、散射、吸收、衍射和干涉等光学规律，因为这些现象在自然界中非常普遍。在艺术实践中，一些关于多维空间、图论、拓扑学、集合论等的信息可能有用。文艺复兴时期，许多艺术家同时也是当时受教育程度最高的一批人，尽管这一时期早已过去，但仍应为此而努力。

考虑到画家和雕塑家的工作特点，本方法规则书特别关注直接在画布上绘图的方法。大多数教科书中所提出的构建透视图的方法基于两个正交射影，这种方法对画家来说几乎没有用处，这之所以发生，是由于画家通常没有所描绘对象的图纸。此外，本方法规则书还涉及一些问题，其在现有教学书籍中几乎或完全不受关注。

现有诸多计算机辅助绘制平面图与立体图的方法。现代摄影和扫描技术使得获得几乎任何实物的二维像或立体像（三维像）成为可能。所以即使对画家来说，手动构建此类图像的能力也会退居次要地位。

但我们不应该忘记，计算机、照相机、扫描仪、平面打印机或三维立体打印机只是工具而已。就算它们比尺子或圆规好得多，也就是工具而已。仅仅能够使用工具是不够的，你需要认识到使用工具的目的和结果。“思想必须先于画笔落下”，这种古老的智慧适用于任何工具。

触手可及、动态的虚拟图像世界往往会给用户带来一种无所不知、无所不能的错觉，但这只不过是一种错觉。会使用计算机、扫描仪和照相机，却不了解图像理论的人，在许多方面类似于一个文盲把任何一种文体都会阅览诵读，但对书中的内容一窍不通。

因此，了解成像的基本定律和原理日益显示出其重要的意义。纵观历史，人类一直不知不觉以透视投影方式看世界。对成像定律的研究及理解始于文艺复兴时期，一直持续至今，还将一直继续下去。

几何知识绝不会阻碍幻想的自由飞翔，相反，其可以提示艺术解决方案，没有这种知识，这种方案谁也不会想出来。只有精通几何定律的人才能自觉流畅地使用或违反几何定律。

同时，我们应该清楚地认识到，任何理论或模型并不能完全等同于事实。事实与理论之间的关系，似乎像原件与复制件之间的关系一样。无论原件被复制得多么逼真，复制件永远不会成为原件。我们通过更深入的分析总会揭示出它们之间的差异。同样，任何理论的适用范围有限，若超出这个范围，理论将与现实不符，其便完全失效。

因此，不建议画家在任何事情上都盲目地严格按照理论去做，反而画家可以、且需要根据自己的个性和设定的目标对作品进行一定的调整。

I.关于投影图像和几何集合的一般概念

投影图像一般分为几种类型：正交射影、轴测投影、透视投影和地图投影。但是更广义地说，这种概念涵盖更广泛的图像范围。阴影、反射、折射、浮雕甚至圆形雕塑也可以被视为投影图像，并根据同样的几何定律形成。

画家通常使用的各种各样的投影图像可分为二维像和三维像两大类。当然，每个人都听说过多维空间，但很少有人知道它是什么。投影法让我们可以对多维空间做出最简单直观的释义，从而甚至在艺术实践中使用多维概念视图。

二维图像形成在一个平面或其他二维表面上（圆柱形、球形等）。形成投影图像的表面统称为图片平面或简称为图片。二维图片一般用于描绘二维或三维的立体物体，但原则上任何有限维数的物体都可以被描绘（投影）到二维图片上。

三维图像包括浮雕和雕塑图像，以及透视舞台背景。在这种情况下，图片就是三维空间的一部分，其受限于雕塑的大小，浮雕的深度或舞台的深度。三维的现实物体，或者多维抽象物体都会被映射到这种以某种方式变形的图片空间上。

1.1.线性几何集合

基本几何图像：点、线、面、三维空间、多维空间，均统称为线性几何图像或线性集合。这些不同组合的图像都会形成具有某些性质的各种各样的几何集合（图像、对象）。任何一个几何对象，都是由许多点、平面等组合而成的。

几何集合或图像（对象）之间会有不同的数量关系或位置关系。等于、大于、小于、长于、短于等均被称为数量关系或度量关系。相等、属于、接入、相交、不相交均被称为位置关系。

在中学几何课程中，普遍认为，平面上的线性几何图像只有两种：点和线。但是如果一条直线可以被认为是无数个点的集合，则经过一点可以画无数条直线。这样的集合被称为线束，而这种集合也是线性集合。如果一个点恰好属于一条直线上的点集，那么这条直线也可以被认为是属于上述线束中所有直线集合中的一条线。

集合法使我们能够从另一个角度对通俗（欧几里得）几何的理解进行稍微不同的解释。两个集合的交集是同属于这两个集合的第三个集合。比如，平面上两条直线相交于一点，这是这两条相交线的公共点。同样，两点之间的连线可以被看作是穿过这两点的两组直线集合的交集（两个线束的交线）。

图1.1.1a显示的是两直线m、k，相交于A点。图1.1.1b显示的是两组直线M、K，相交于a线。这些几何集合之间的关系可以用简单的统一形式表示为：

$$k \cap m \equiv A, K \cap M \equiv a$$

其中，符号 和 分别是指相交和相等。我们再次强调，M、K相交不是任意两点相交，而是穿过这些点的两组直线集合相交。a线是两组直线（线束）集合的公共线，因此是两个集合的交集线。

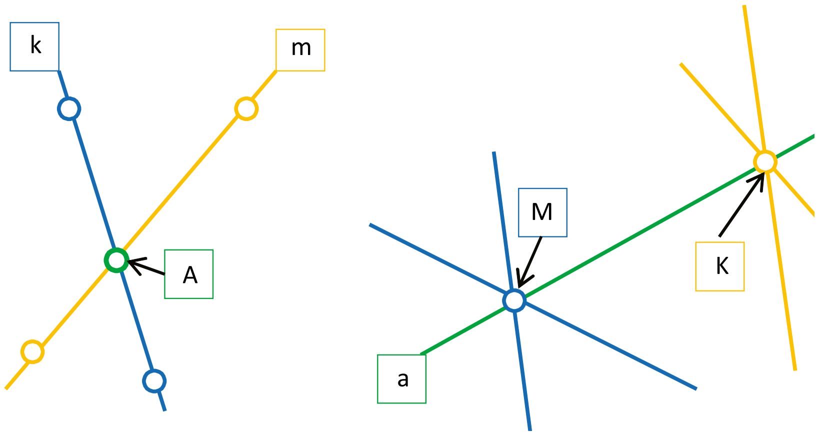

图1.1.1a , 1.1.1b

在形式上，这些集合之间的关系表示为恒等式。在恒等式中，左边写的是运算（在所给的示例中是相交），而右边写的是该运算结果。

如下所示，任何几何图形的定位算法都可以以符号形式编写，无需参考任何坐标系。

在三维空间中，除点和线外，增加了另一个线性图像——平面。线性集合的数量也随之增加。出现了穿过同一条直线的平面的集合，即**平面束**。三维空间中，某一点不仅是无数条直线的公共点，而且还是无数个平面的公共点。这样的集合被称为**直线与平面的把**。

图1.1.2a显示的是三维空间中一条直线k与一个平面α相交，其相交于A点。符号形式：

$$k \cap \alpha \equiv A$$

图1.1.2b显示的是平面束k与平面丛A相交。其相交形成平面α（显示为绿色），该平面既属于平面束，又属于平面丛。这种运算可以用符号形式表示为：

$$k \cap A \equiv \alpha$$

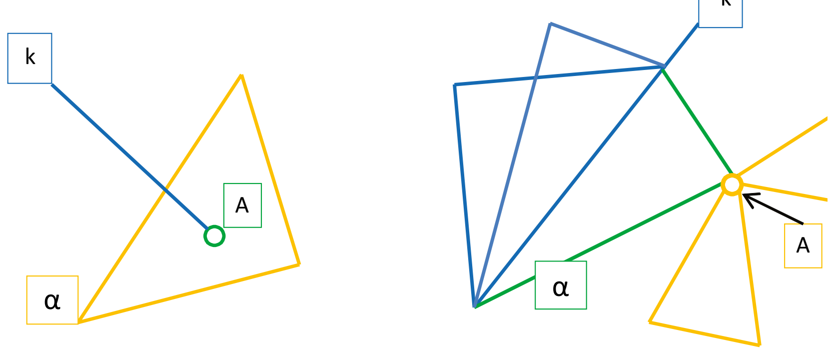

图1.1.2a , 1.1.2b

值得指出的是，在传统方法下，不管在平面上，还是在三维空间或多维空间中，两个不同点都可以确定一条直线，不过按集合法，这仅会发生在平面上两个线束相交处。三维空间中，两个**直线与平面把的交点**并不是一条直线，而是一个平面束（通过同一条直线的平面的集合）。三维空间中的一条直线是由两个平面或两个直线把（或直线丛）相交而成的。

形式上本集合法也可以推广到多维空间。例如，四维空间中，某一点不仅是无数条直线和无数个平面的公共点，而且还是通过该点的全部三维空间的公共点（包括直线丛、平面丛和三维空间丛）。这种两种丛的交集是属于一条直线（平面束和三维空间束）的平面和三维空间等的集合。

几何集合由无数元素组成。例如，一条直线，甚至其中一条线段，都是由无数个点组成，经过一点可以画无数条直线，等等。用于比较有限集的关系，比如“大于”、“小于”、“等于”，对于无限集都是不可接受的。为了比较无限集合，使用集合维度的概念

在传统意义上，无限集合维度是为了从集合中取出一个元素而所需的参数（坐标）数量。比如，为了取出直线上的一个点，只需指定一个参数（坐标），在平面上需指定两个参数，在空间需指定三个参数。在这种情况下，集合的元素为点。因此，点被认为是零维集，直线是一维点集，空间是三维点集。从理论上说，可以构建任何正维甚至负维的点空间。

几何集合的元素不仅仅可以是点，还可以是任何其他几何图像。例如，在直线束中，集合中的元素不是点，而是直线。

由点以外的元素组成的集合的维度可以直接确定，也可以通过与已知维度的集合进行比较来得出。如果可以建立两个集合的元素之间的一对一的对应关系（一个集合的元素对应于另一个集合的元素，反之亦然），那么这两个集合的维度是相等的。

例如，直线束中每条线与平面上的任意直线在一点相交，反之亦然，这条直线的每个点对应于直线束中单条直线。因此，这些集合的维度相等且都等于一。同样可以确定的是，三维丛中的直线和平面的集合是二维的，因为该集合的元素通过二维点和二维直线集合与平面相交，依此类推。

1.2.多维空间

关于多维空间，一个普遍共识是，多维空间被认为是极为复杂和不可理解认识的。投影法不仅让我们可以对多维空间作出最简单直观的释义，甚至让我们可以将多维性作为一种艺术手段。

感知多维空间的复杂性在很大程度上只是心理作用。在真实世界里，点、直线、平面等都不存在，所有这些都只是抽象的几何概念而已。不过我们很容易理解这些抽象的概念，因为我们可以将它们与常见的实际事物相关联。在我们看来，三维欧几里得几何合符生活经验和常识。

相反，多维几何并不符合我们的常识。在可认知的现实中毫无类似物。但千万要记住，首先，我们所感知的现实占现有现实的一个微不足道的部分，其次，抽象理论从未完全符合实践，并且可以超出可觉察现实的范围。

为了更容易地理解多维性，千万不要依赖于所谓的空间想象力，因为大多数人的空间想象力以三维形式为主。在这种情况下，这种想象力无济于事，只会带来困难和阻碍。往往被称为空间想象力的能力并非与生俱来和绝对不变的，反而在很大程度上因人而异，取决于一个人的能力、生活经验和知识。因此，如果愿意的话，可以培养自身的多维空间想象力。

可以以简单图形为例来说明多维性，以下图形由点（顶点）和连接这些点的直线或曲线（边）组成。

这样的图形被统称为**图**。任意图可以由任意数量的顶点和以任意顺序连接顶点的边而成。当所有顶点都连接到所有其他顶点，则该图被称为**完全图**。其中部分图被称为其**子图**。

图1.2.1显示的是一系列完全图，对应0到5维的空间。

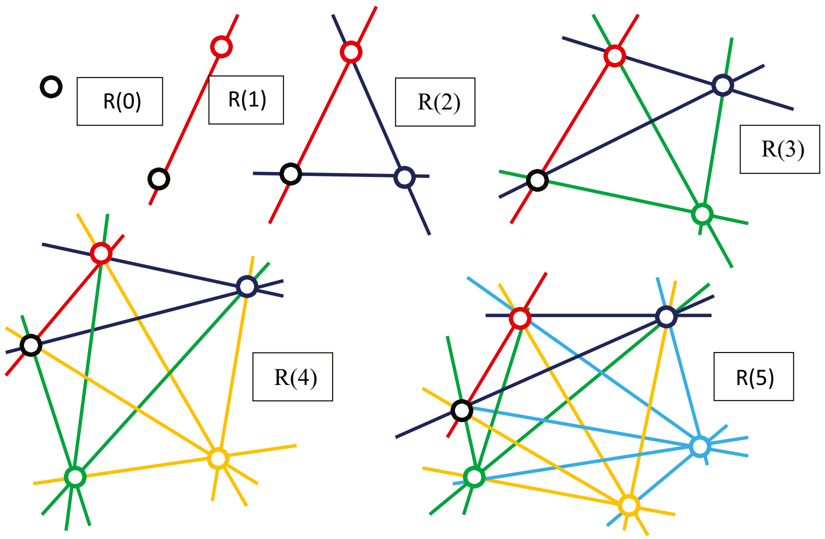

图1.2.1

由一个顶点组成的图对应0维空间R(0)（点）。由两个顶点和一条边组成的图对应一维空间R(1)（直线）。由三个顶点和三条边组成的图对应二维空间R(2)（平面），依此类推。

可以直接从图中看出，每个后续空间都是由前一个空间通过添加一个不属于前一个空间的点而形成的。所添加的点都是通过边与其他点连接。如果R(n)表示空间维度，其中n是维度值，那么这个值一定等于相应的完全图中一个公共点所连接的所有边数。顶点数V一定比空间维度多一个V=(n+1)。边数L由以下的公式确定：L=[n(n+1)]/2或L=[(V–1)V]/2。

与三维空间对应的图R(3)可以被解释为是一个四面体的图像（平面投影），其由4个顶点、6条边和4个面组成。这种解释毫无争议，因为我们习惯于将平面图像视为三维立体物体。

然而如果一个三维物体可以被投影到一个平面上，那么一个多维物体同样也可以被投影到一个平面上。例如，与四维空间对应的图可以被解释为是一个四维结构被投影到一个平面上的投影。这种四维结构由5个顶点、10条边、10个面和5个三维空间组成。

一般情况下，如果一个完全图由V个顶点组成，则其含有v个顶点的子图（子空间）的个数可以用下式计算：

$$N = V! / [(V - v)!\, v!] \qquad (1.2.1)$$

如果在一个三维空间图中选择两个二维子图，那么它们一定会有一条公共边。对应于一条直线和一个平面的子图一定有一个公共顶点。这些结果符合：在三维空间中，两个平面相交于一条直线，一条直线与一个平面相交于一点。

同样的，如果一个平面和一个三维空间在一个四维空间图中被挑选出来，那么可以确定它们在这种情况下相交于一条直线，两个平面相交于一点，等等。这种算法适用于任何维度的空间。

由此可知，经过一个点不仅可以画出直线或平面（一维和二维空间），也可以画出不计其数的具有任何有限维度的空间。

在上文中对多维空间给出的图解法可应用到实践与艺术中。

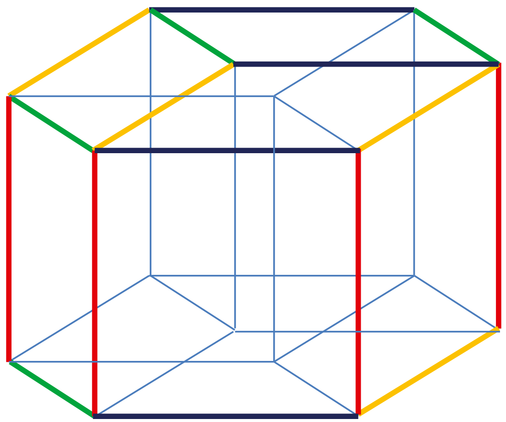

图1.2.2

图1.2.2显示的是四维立方体的轴测图。这种立方体的每个顶点都有4条棱相交。如果以任一顶点作为坐标原点，四棱作为坐标轴直线的单位线段，那么像三维立方体的轴测图一样，用这个四维直角坐标系的模型，就可以解决任何四维问题。

通过添加新的坐标线（坐标轴），就可以绘制任意维度的立方体。值得指出的是，讲到四维立方体或n-维立方体，这只不过是有条件的名称而已，我们同样有充分理由把三维立方体叫做三维正方形，或是把正方形叫做二维线段，或是把线段叫做一维点等等。

像三维物体的二维平面图像一样，色调、阴影和色彩建模也可应用于多维图像。将平面图像视为多维纯粹是一种习惯问题。

几何空间（几何集合）的维度尺度与一般的数值尺度之间的不同之处在于前者的测量范围起始点不是0，而是个空集，其维度为–1。

……–6、–5、–4、–3、–2、(–1)、0、1、2、3、4……

理论上，这个尺度可以在维度的正负范围内扩展到无穷大。对应的正负维度空间以测量起始点为对称点。点R(0)对应于负点R(–2)，直线R(1)对应于负线R(–3)，依此类推。

图1.2.1中的图形让我们可以对负数维度作出最简单的释义。如果在一个三维空间的图中选择两个一维子图，那么这些子图可能不会相交。在这种情况下，它们的交集是空集，其维度为R(–1)。如果在一个四维空间的图中选择两条直线，那么它们不仅不会相交，而且在四维的图中会有一个自由顶点不属于这些子图。从相交运算来看，这个顶点可以被解释为负点R(–2)，以此类推。

如果给定的空间（相对空间）的维度为n，相交空间的维度分别为k、h，那么它们相交的空间的维度p可以用下式计算：

$$p=k+h-n \tag{1.2.2}$$

空间的多维和负数解释使该公式对任何准入参数值都有意义。

一般而言，几何空间应该被视为是无限维的。任何有限维的空间都可以被看作是无限维空间的一部分。

1.3.线性投影运算

按最概括性释义，投影指的是按某种规则将一个集合投射到另一个集合上去。如果一个集合的一个元素对应于另一个集合的唯一元素，反之亦然，那么两个集合之间存在一对一关系映射。如果一个集合的一个元素不是对应于另一个集合的一个元素，而是对应于其中的某组元素（子集），那么这种映射就是非单值的。

投影时，物体的部分特性会发生变化，而其他特性保持不变。保持不变的特性又称为在给定条件下的不变性。

物体的投影（映射）操作通过几何投影设备进行，后者包括投影集和图片集。投影集的元素与图片集合的交集会在图片上形成物体的某个投影图像。投影集和图片集合选择可以是完全任意的，仅由任务决定。

通过投影运算，我们可以在实际或抽象空间的点集合和图片空间的点集合之间建立对应关系，换句话说，我们可以在图片上绘制一个实际或抽象对象的图像。

最简单和最常见的投影设备是线性投影设备。线性投影下投影集就是平面上的直线束，或者三维空间中的直线与平面之丛。平面上的图片集合就是直线。在三维空间中，图片是一个平面。投射的起源点统称为投影中心或视点。

例如，在我们熟悉的摄影或电子成像过程中，投影的中心是设备的镜头，而图像是其受光面。在过去两个世纪中，受光面的质量水平发生了翻天覆地的巨大变化，但光学投影的原理保持不变。

人眼具有类似结构。眼球晶状体是投影中心，眼底作为图片。尽管眼球晶状体在视网膜上形成倒像，眼底表面呈凹形，但我们看到的环境与现实场景一致，得益于我们的生活经验和大脑工作机理。因此，在创造以视觉为目的的艺术作品的时候，应考虑到所有人都具有相同的目视光学系统，以及因人而异的观察者的精神气质。

图1.3.1a和图1.3.1b分别示意性地示出平面投影机理和三维投影机理。图片集合显示为红色，投影集合显示为蓝色。其中第一幅图即平面上的一组点集被投影到直线上，第二幅图即三维空间中的一组点集被投影到平面上。

一般来说，将二维或三维物体分别线性投影到直线或平面上，直线的投影也是直线。一条直线在通过投影中心后投影到一点。

使用线性投影，在大多数情况下无法保留度量关系。线段的投影和直线之间的角度投影（在三维投影中）的尺寸会比实物的尺寸更大或更小。

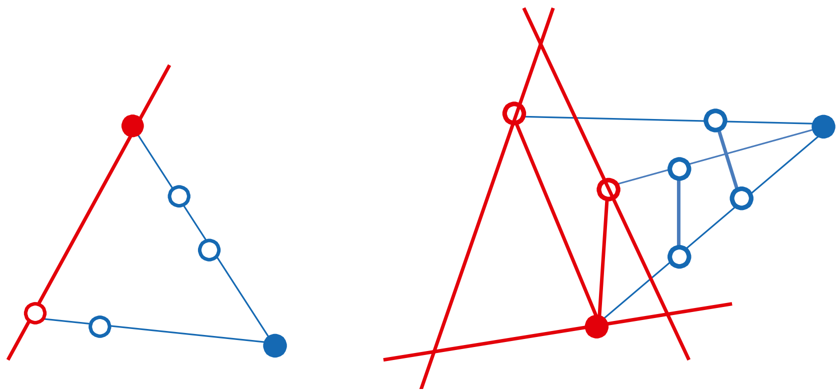

图1.3.1a , 1.3.1b

在投影过程中，几何图像之间的位置关系（如相等、属于、接入、相交）仍未改变。例如，如果两条直线在三维空间中相交，那么这些直线在平面上的投影直线也相交。在专业文献中，如果事物的特性在某些变换下保持不变，则这些特性被统称为特定变换下的常量。不变性是说，几何集合之间的位置关系在相应的线性投影运算下不变。

由于投影运算具有非唯一性，相反的说法不成立。直线在平面上相交的投影在三维空间中可以对应于相交线或交叉（非相交）线。

图1.3.1b显示的是三维空间中两条非相交（交叉）线，不过这些直线在平面上的投影直线相交（投影平面上的相交点显示为实心点）。在这种情况下，投影平面上的交点并不对应于三维空间中的单点，而是对应于两点分别属于两条不同的直线。

由此可见，将平面投影到直线上，以及将三维空间从一个中心投影到平面上，均是具有非唯一性运算。三维空间或平面上位于同一条投影线的所有点都投射到同一点，这是由于投影集和图片集的尺寸不同造成的。前者是二维平面上的点集投影到直线上的一维点集，后者是三维空间中的点集投影到平面上的二维点集。

为了消除这种非唯一性，使用了所谓的两个或多个投影（图像）的方法。

该方法概要如下：使用一个或多个投影中心，将事物投影到一个或多个图片上，每个点并不只有一个投影，而是两个或更多投影。该方法广泛用于工程制图中，根据该方法，可以用一个或多个正交投影（视图）来表示一个立体物体。这样可以通过平面图像显示并制作三维物体。

值得指出的是，投影数量一定等于投影中心的数量，但承影图片可以是一个，而不取决于投影中心数。仅仅出于感知方便的原因，图片的数量被设定为等于投影中心的数量。

多图像原理在自然界中也普遍存在。大多数动物至少有两只眼睛，这使得它们可以从至少两个角度同时去观察近处的物体。这样可以从二维或更多维图像获得更完整的真实三维空间中的度量图。

图1.3.2a和图1.3.2b分别为平面和三维空间的两种图像构建方法的示意图。其中第一幅图显示的是平面上任意点通过两个投影中心（显示为蓝色实心点）投影到图片上的两条直线（显示为红色）上，在每一条直线上分别各有一个投影。被投影点显示为蓝色，其两个投影显示为红色空点。穿过投影中心的直线与图片的交点显示为红色实心点。

相反，如果我们在图片的直线上设置两个任意点，则将这些点与投影中心连接后，在投影线的交点处就有平面上的唯一一个点。

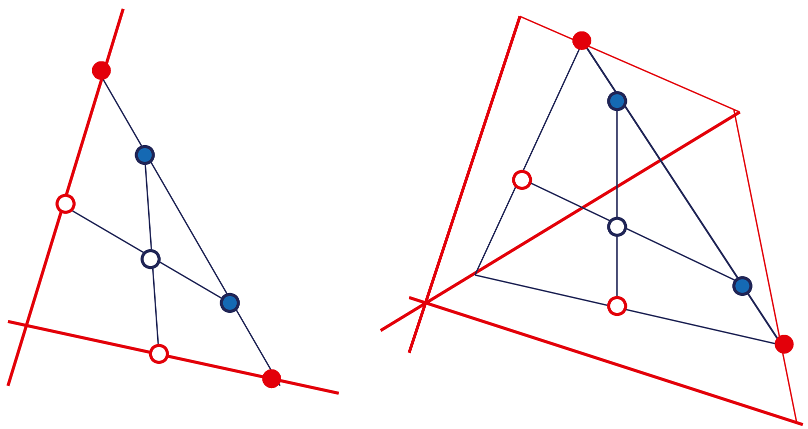

图1.3.2a，1.3.2b

这样，我们可以在平面的点集合和图片直线的点对集合之间建立一对一的对应关系。这些集合的维度是相等的，因为仅需要有一个参数即可在直线上取出一个点，为了取出两个点，只需要有两个参数。一个集合的元素是一个点，另一个集合的元素是点对。我们再次强调，原则上，什么都可以作为集合的元素。

图1.3.2b显示的是三维空间中的一个点通过两个投影中心投影到两个平面上，由于两个投影中心与一个给定点就可以确定一个平面，因此投影对位于该投影平面与图像平面相交的直线（连接线）上。为了取出这种成对的投影，需要有以下三个参数：其中两个参数用来取出其中一个图像平面上的任意点，第三个参数用来取出投影平面与另一个图像平面的交线（连接线）上的一个点。因此，在这种

情况下，在三维点集与点在图像平面上投射的三维点对集合之间存在一对一的对应关系。

在上面的例子中，投影中心属于相对立的图片线或图片平面，但这不是必需的，我们可以完全任意地给定任何投影中心。

细心的读者可能会注意到，如果一条直线（排除线）经过投影中心，则这一条直线上的所有点都会投影到同一点对上。为了避免这种例外发生，可以给定第三个投影中心和第三条图片线或第三个图片平面，但通常两个投影就足够了。

1.4.无穷远元素

一个众所皆知且常见的事实是，在透视图中，向远处伸展的平行线似乎在地平线上汇合并相交。长期以来，人们试图用欧几里得几何解决并协调这一悖论，但并未成功，因为欧几里得几何认为，平行线没有交点。在十八世纪，法国几何学家和建筑师吉拉德·笛沙格建议用无穷远的一特殊点来补充这条线，并认为平行线在这一点相交。但是，尽管如此，透视几何学仍然被认为是欧几里得几何学的一个特殊分支。但只有在洛巴切夫斯基证明除了欧几里得之外还存在其他几何学之后，透视几何（更常被成为投影几何）的独立性才最终得到承认。

投影几何学跟欧几里得几何学的唯一不同之处是一个与平行线有关的公理。在欧几里得几何中，除了平行线以外，平面上的所有直线都相交，平行线没有交点。总之，根据欧几里得理论，平面上的所有直线都相交，但有一个例外，那就是平行线没有交点。在欧几里得三维空间中，除了平行面不能相交以外，所有平面相交于直线。

在投影几何中，平面上所有直线是平等的，并且相交于一个固有点或无穷远点。同时，无穷远点被认为是与所有其他点完全平等的。通过投影运算，一个无穷远点总能被看成是一个固有点，反之亦然：任何固有点都可以投影到一个无穷远点。

同样，在三维投影空间中，平行平面相交于无穷远直线。在透视图像中，地平线只不过是无穷远直线在图片平面上的投影。这条直线上的所有点都在无穷远处，因此，汇聚在地平线上的某个点的所有直线都是平行的。

这样一来，如果在投影空间中给一条直线补充一个无穷远点，一个平面补充一条无穷远直线，那么三维空间也会补充有一个无穷远平面，同时三维空间的所有无穷远点和所有无穷远直线都属于这个无穷远平面。

从理论上讲，这个序列可以无限地继续下去，四维空间会补充有无穷远三维空间，五维空间会补充有无穷远四维空间，以此类推。

无穷远元素的概念的起源与线性投影的运算息息相关。试分析两条直线上点之间的投影对应（透视对应）的关系（见图1.4.1）。如果我们在平面上设置两条任意直线m_1、m_2和一个不属于这两条直线的任意点S（以点S为顶点的直线束），则这样，我们就可以在给定直线上的点之间建立一对一的透视对应的关系。S束中的任何直线与每条给定直线相交于唯一点。位于同一投影线上的点对之间是存在对应透视关系的。换句话说，一条直线上的一组点集通过投影中心S投影到（反映到）另一条直线上的一组点集，并自投影中心S反向投影。因此，这些直线中的任何一条都可以被认为是一个投影图片，另一条直线上的点投影到其上。

在所示图中，直线b在对应点B_1–B_2处与给定直线相交，直线c在对应点C_1–C_2处相交，直线a穿过相等点$A_1 \equiv A_2$，等等。对应点的颜色一致。

这样一来，我们可以在两条直线上的点之间建立一对一的透视对应的关系，一条直线上的点对应于另一条直线上的点，反之亦然。

欧几里得几何学的观点认为，如果给定直线中的一条直线平行于

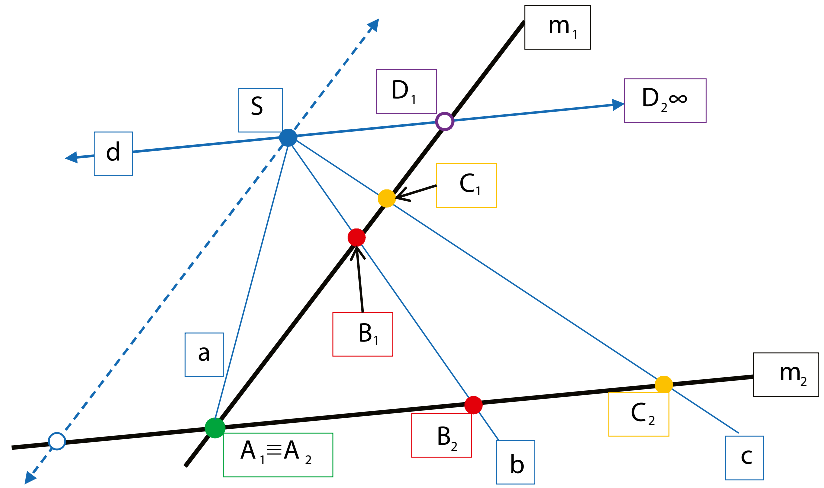

图1.4.1

投影直线，那么点之间的一一透视对应的关系并不成立（在图中直线d平行于直线m_2）。直线d在点D_1处穿过直线m_1，从欧几里得几何学的角度来讲，由于平行线不相交，两者之中前者在直线m_1上没有对应点。

为了消除这种例外，平行线也可以认为相交于无穷远点。在这种情况下，点D_1会对应于无穷远处的点D2∞，两条直线上的点之间的一一透视对应的关系也再无例外。

我们可以直接或者间接地设置投影中心S的位置，如果我们在线m_1、m_2上分别任取相对应的成对点B_1–B_2和C_1–C_2，从而会有两条直线b、c分别经过对应点。这些直线会相交于点S。

这种运算可以用符号形象表示为：$B_1 \cap B_2 \equiv b, C_1 \cap C_2 \equiv c, c \cap b \equiv S$。如果省略中间结果的符号，那么这个表达也可以被缩略为 。$(B_1 \cap B_2) \cap (C_1 \cap C_2) \equiv S$

如果两条相交直线m_1、m_2的公共点被视为是相等的一对对应点$A_1 \equiv A_2$，那么可以得出结论，**通过设置三对对应点可以建立两条直线上点之间的透视对应的关系**。这条规则是线性透视中的一条最重要、最基础的定理 。

比如，依照这条定理，我们就可以在等分测尺与透视测尺之间建立对应关系。这样我们就可以在测量过程中像使用等分测尺那样使用透视测尺。

在上面的例子中，一对点是相等点，这让构建过程简单多了。如果所有给定的成对点都是绝不相等的，那么可以移动其中一条直线，直到到达任何点对的迭合处，使一对对应点合并为一，这样把运算简化为上述的简式。还有另一种解决方法，如图1.4.2所示。

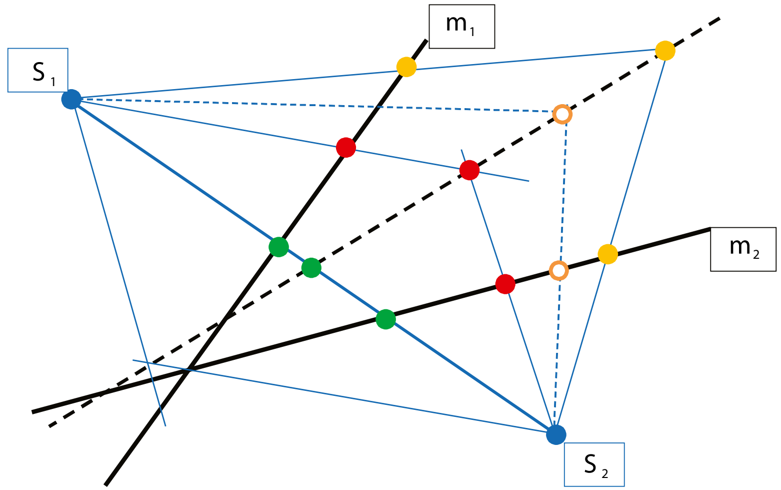

图1.4.2

在两条给定的线m_1、m_2上，先任取三对对应点（呈绿色、红色和黄色），经过任何相对应的成对点画一条直线（蓝色粗线），在这一条线上任取两个投影中心S_1、S_2。两对投影直线分别经过对应点后相交于两点（一个红点和一个黄点），所得的两个交点共线（图中虚线）是所有给定线的透视对应线，也是它们之间的中间线。若在给定的线上要构建相应的点，则我们只需要两次重复前述解决方案即可。在图中以虚线显示的是任意一对对应点（用橙色标出）的结构。同时值得注意的是，在这个例子中给定线的交点不是相等点。

把无穷远点引入到线上点集中的想法可能看起来完全无关紧要，不过这是最卓越的数学思想之一。其意义堪与对数列补零的思想相提并论，补零思想，起初也显得微不足道，但随后改变了整个数学。

无穷远元素使得能够创造几何学理论，欧几里得几何学不过是这种几何学理论的特例。还有更具普遍意义的理论，如拓扑学或集合论。相较于这些理论，投影几何学是特例。

千万不要以现实来跟数学抽象相提并论。昔日，最早的非欧几里得几何学的创立者罗巴切夫斯基称他的新几何学为虚构的几何学，以区别于“真正的”欧几里得几何学。随着数学的进一步发展，人类意识到了，与洛巴切夫斯基的几何学或任何其他非欧几里得几何学比较起来，欧几里得几何学并不是更真实，或更虚幻的。自然界中，点、直线、平面或其他几何图像都不存在，所有这些都只是抽象的数学概念而已。所有这些会或多或少地符合现实，应用范围有限。

1.5.直射变换

通过线性投影运算可以在被投影集合中的元素与其投影的元素之间建立一种对应关系。同时，一般而言，点的投影是点，直线的投影是直线，平面的投影是平面，以此类推。

如果被投影的集合具有与图片的集合相同的维度，那么在使用线性投影的时候，我们可以在这些集合的元素之间建立一对一关系的对应。比如，当一条直线被投影到一条直线上，一条直线上的某一点对应于另一条直线上一个且仅一个点，反之亦然。当一个平面被投影到一个平面上，这些平面上的点、线之间的关系就是一对一的对应关系。当一个三维空间被投影到一个三维空间中（浮雕或透视舞台背景），真实空间的点、线、面分别对应于图片空间的点、线、面。

这种透视一一对应的特例，是指一个线性几何图像（集合）对应于一个相似的线性图像，被称为**共线对应**或简称为**共线**。共线对应被广泛应用于透视和其他投影图像的绘制中。

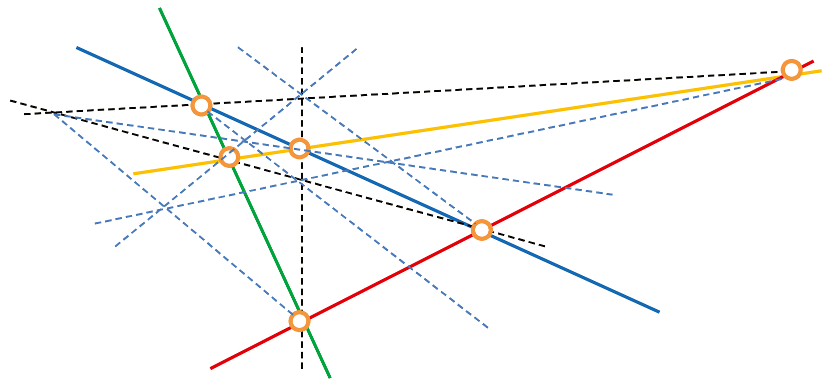

图1.5.1

如1.4节所述，为了在两条直线的点之间建立透视对应的关系，只需要在一条直线上任取三个点，并在另一条直线上设置三个对应点就行了。当实现这种对应关系时，我们就会得到一个由四条直线和六个点组成的平面结构（构型）（如图1.5.1所示）。这种结构的所有点和所有线都是完全同等的，每个点有2条直线通过，每条线上有3个点。因此，任意一个点都可以作为投影中心，这样就可以在不通过所选点的两条直线的点之间建立透视对应关系。这样一来，这幅构图就是平面上的坐标系。

这幅构图包括不在给定4条直线上的3对点。将这些点连接在一起，就得出另外3条直线（黑色虚线）。这些直线相交得出3个点，这

些点与已有的点之间，会有连接线（天蓝色虚线）。依此类推，就会得出无数的点和线。每条直线与最初所给的每条直线相交，并可以通过在任意两条线上取两个点来唯一确定。平面上的任何一点都会因两条直线相交而得出。

任取四个点或四条线，就唯一地确定了上述构图。在这种情况下，无任何三条线通过一点，无任何三点位于一条线上。

由此可见，如果在两个平面上任取四对对应点或任取四对对应线，则这些平面上的所有其他点和线间呈现一对一的线性对应关系。在个别情况下，平面可以重合，这样，在同一平面的元素之间呈现对应关系（重合空间）。由四个点所构成的图形，称为四角形，由四条直线所构成的图形，称为四边形。这两种图形都是完全等同的，我们可以随时从一个图形切换到另一个图形。

图1.5.2显示的是平面上共线对应关系的示意图。

在一个平面上任取4对对应线（两个四边形）。对应的线显示为相同的颜色。对应点位于对应线的交点处。

该图显示的是任意一对对应点的构造方式。为简化构造，给定的一对对应点作为相等点。这总是可以通过移动一个相应的四边形，直到任何一对相应的点重叠来实现。

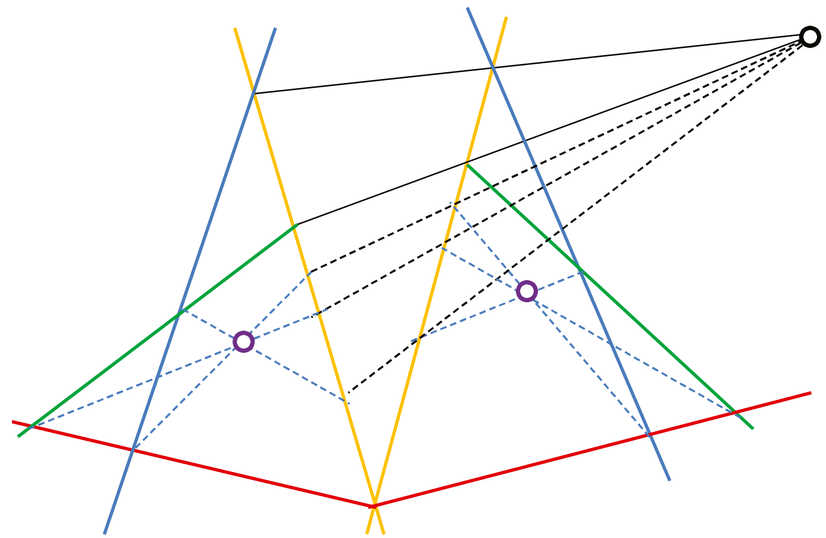

图1.5.2

按照如图1.4.1所示的算法，在两条对应线的点之间（显示为黄色）确定透视对应关系（投影中心显示为黑色）。构造一对对应点，用虚线表示。对应点（显示为紫色）位于三条对应线的交点处。在实践中，其中任何两条对应线都足以构造出对应点。

这样一来，可以构造无数的对应点对。总之，如果在一个平面上有任何线条或图案，那么在另一个平面上就可以为它们建立透视对应关系。

在共线条件下，如果一对线是相等的（如图1.5.3所示），那么由于在一条相等线上的点都是相等的，所以不需要在这一条线上的点之间建立透视对应关系。这种平面上的透视对应的特例，被统称为**同调**或者**笛沙格构型**。

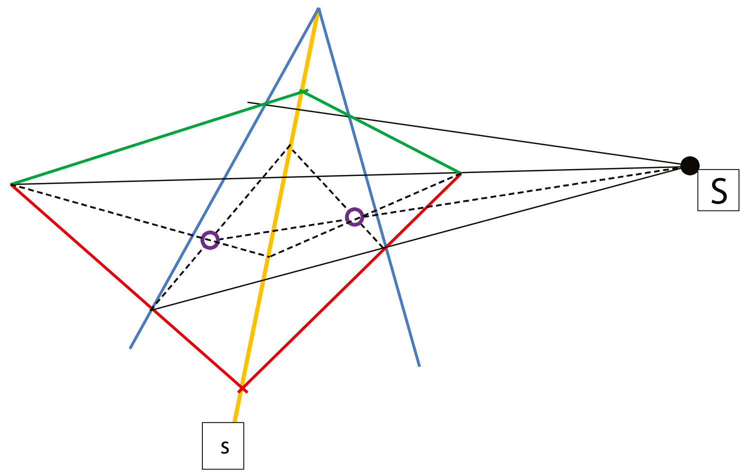

图1.5.3

在同调中，所有对应的直线都相交于一条相等线处（同调轴s），同时所有对应点对都位于相交于同一点（同调中心S）的直线上。上述特点大大简化了对应点的构造方式。因此，同调被广泛用于投影图像的构建。我们在中学里所学到的几何变换，例如平移、轴对称和中心对称，都是同调的特例，意味着同调中心或者同调轴，或者两者都在无穷远处。

图1.5.4显示的是用四对对应点给定同调的方法。其中的一对对应点被看作处于相等状态（同调中心S）。其余的三对点被设置在通过同调中心的线上。三对对应线相交得出三点，这三点都位于同一条线（同调轴s）。构造的任意一对对应点显示为天蓝色虚线。

给定同调最简单的方法，就是使用一个中心、一个轴和一对对应点（如图1.5.5所示）。在这种情况下，只需要画出三条线，就足以构造出对应点。

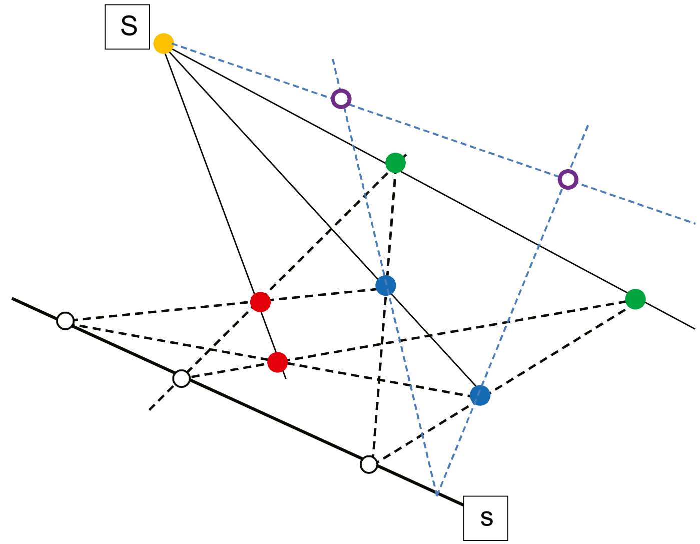

图1.5.4

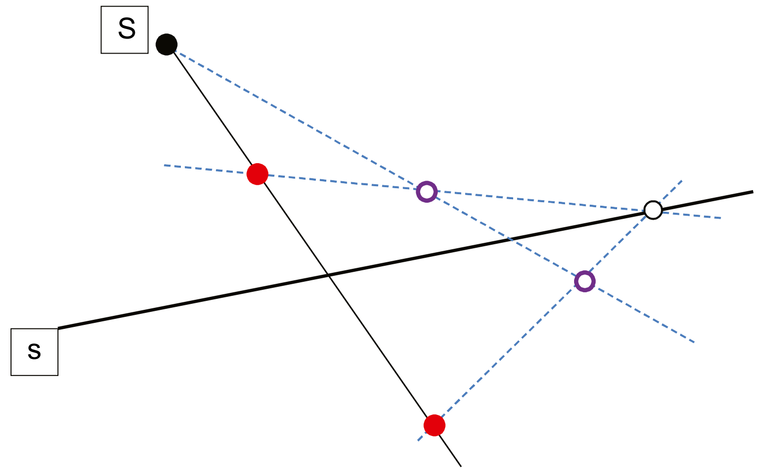

图1.5.5

三维共线决定于五对对应平面或点。三维同调可以用一个中心、一个相等平面和一对对应点确定。在下文中，这种方法将用来构建浮雕和透视舞台背景。

1.6.几何对偶原理

如果对一条直线补充一个无穷远点，那么在平面上，我们就可以在直线束中的线集与任何一条不通过直线束顶点的直线上的点集之间建立全面的（无一例外的）、一对一的对应关系（如图1.6.1所示）。直线束x*中的每条直线A*对应于直线x上的一个唯一点A，反之亦然。在所示图中，对应点和对应线呈同一颜色，黄色直线平行于给定直线x，并在无穷远点处与之相交。

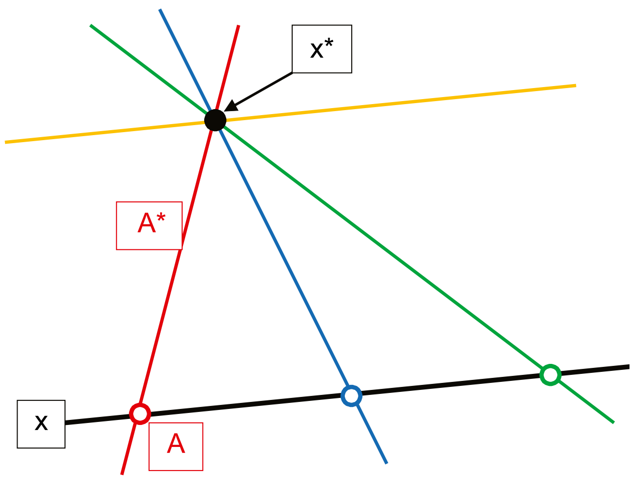

图1.6.1

这样的一对一关系会导致平面上的线和点之间存在有趣的对应关系，被称为**对偶原理**。根据这一原理，任何平面定理、算法、对应关系、命题等仍成立，若交换其中的点和线的位置。例如，属于两条

线的两个点集合相交于一点，这种命题对应于对偶命题，即分属于两个直线束中的两个直线集合相交于一条线，依此类推。

集合法使我们能够对对偶原理给出一个简单的建设性论证，并提出一种可用于实际的通用算法，以实现对偶变换。

如上所示，通过任取三个点就可以建立直线的透视坐标系。

平面上的投影坐标系决定于两条线（坐标轴）和这些线上的三个点。每个坐标轴上的透视坐标系也决定于这三个点。

在最简单的情况下，其中一个点是相等点，属于两条线。如果我们通过这个相等点A画一条任意直线A*，并在其上任取直线束的顶点x*、y*。将这些顶点与x、y坐标轴上的点连接后，我们会得出两个直线束，这些直线束中的直线与其他直线上的点之间有一对一的透视对应关系（如图1.6.2所示）。这样一来，我们会获得一个由两条直线x、y组成的几何结构，这两条直线上各有三个点A，B，C和A，D，E。公共点A是这两直线的交点。这一结构对应由两点（直线束的顶点）x*、y*组成的对偶结构。经过每一顶点的直线共有三条，两个顶点分别属于直线A*、B*、C*和直线A*、D*、E*。两个直线束相交于公共线A*。

根据所提出的方案构造对偶元素的算法极其简单。坐标轴上的两个任意点（坐标）可以确定通过这两点的直线有且只有一条。穿过这两个点的直线可以被看作是穿过这两点的两组直线集合的交集。

穿过这些给定坐标点的两个直线束中的直线交点会确定对偶于该线的唯一点，反之亦然，平面上的任何一个点都会确定两个直线束的两条直线，这两条直线与坐标轴的两个交点确定该点的对偶直线。

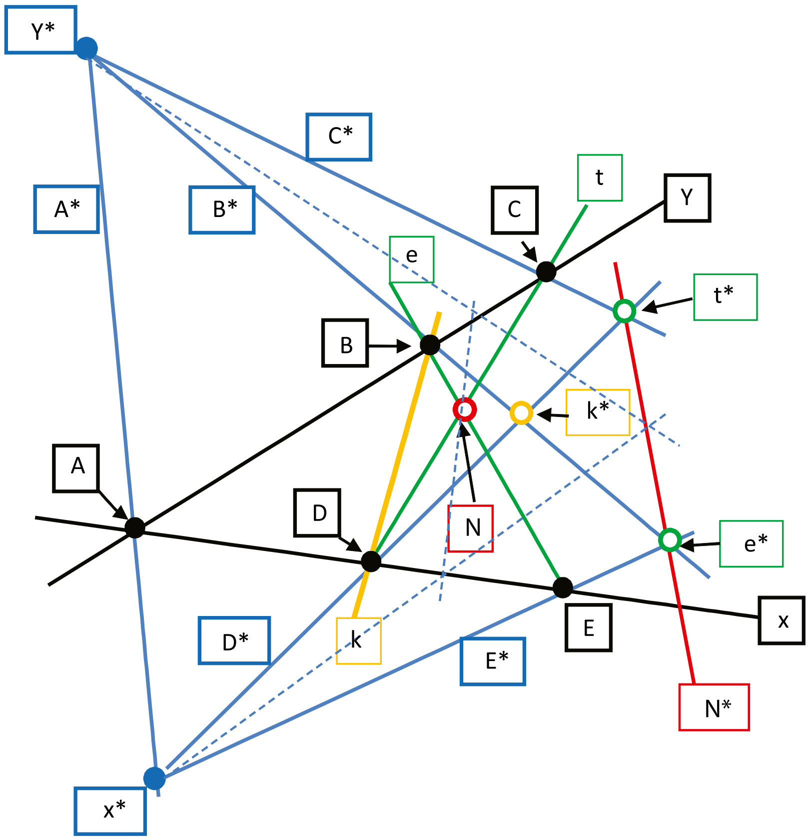

图1.6.2

在上述几何作图中，一条给定直线上的每个点会对应于一条穿过对偶于该线上的点的直线，反之亦然，每一条穿过给定点的直线对应

于给定点的对偶直线上的一点。换句话说，每个线性点集对应于直线束中的直线集合，反之亦然。

通过设置第三坐标轴（坐标三角形）和一个对应于该轴的对偶点，就可以很容易地排除以下例外的情况，比如给定的直线通过相等点（坐标原点）或者一个点位于相等线。

图1.6.2中，两条给定的坐标线及其上的点显示为黑色，对应顶点和对偶直线束中的直线显示为蓝色。

如果一个点属于三条直线，那么可想而知三条线相交于这一点了。如果三个点都位于一条直线，那么可想而知三个直线束相交于一条直线。在第一种情况下，三个点都属于一条直线上的点集，而在第二种情况下，三个直线都属于一个直线束中的线集。

这些对偶关系可以用简单的单一符号形象表示为：

$(A \cap B \cap C) \equiv x \qquad (A^* \cap B^* \cap C^*) \equiv x^*$

$(A \cap D \cap E) \equiv y \qquad (A^* \cap D^* \cap E^*) \equiv y^*$

$y \cap x \equiv A \qquad y^* \cap x^* \equiv A^*$

为了简化理解，对偶集合用相同的字母符号表示。符号*用于区分给定的集合和对偶集合。例如，上述符号串的首行应被理解为点A、B、C属于线x，且线A*、B*、C*通过点x*。

图1.6.2显示的是给定线k的对偶点k*的构造（两者都显示为黄色），以及给定点N的对偶线N*的构造（两者都显示为红色）。

所描绘的对偶构图的算法可以用简单的单一符号形象表示为:

第一种情况:

$$B \cap D \equiv k \quad B^* \cap D^* \equiv k^*$$

第二种情况:

$$C \cap D \equiv t \qquad C^* \cap D^* \equiv t^*$$

$$B \cap E \equiv e \cap t \equiv N \qquad B^* \cap E^* \equiv e^* \cap t^* \equiv N^*$$

由于所有通过运算而得的元素或集合都由所给定的元素或集合组成，所以可以省略中间结果的符号，使用标准代数系统的括号和运算序列。

所以，任何几何定位算法都可以以符号形式编写，并仅使用表示初始给定元素和最终结果的符号。例如，上述算法中的第二个可以表示为:

$$(C \cap D) \cap (B \cap E) \equiv N \qquad (C^* \cap D^*) \cap (B^* \cap E^*) \equiv N^*$$

有大量的中间结果时，以这种形式编写会更为方便。

上述平面对偶性变换算法在形式上也可以展开到任何维度的空间。

如n是空间的维度，则在给定空间中对偶的线性图案（集合）k、k*的维度之间的关系可以用等式表示如下:

$$k^* = n - k - 1 \qquad (1.6.1)$$

例如，在正维域的三维空间中有两对对偶集。平面（由平面上所有点和线组成的集合）——丛（由穿过同一点的所有线和平面组成的集合）。直线（由直线上的所有点组成的集合）——束（有一条公共直线的所有平面的集合）。

在三维空间中，要实现对偶变换，只需设置三个不在同一平面且相交于一个相等点O（坐标原点）的直线（轴）x、y、z就行了。在每条直线上都任意设置两个点。这两点和另一相等点决定每个坐标轴上的点的透视对应关系，换句话说，它们决定空间中的三维投影坐标。

任意画出一个过坐标原点的平面O*，在其上任意设置三条不通过坐标原点的直线x*、y*、z*。由这些线所确定的平面束对偶于坐标轴上的点集。

任何平面在三点处与坐标轴相交。这些点分别对应于相应束中的唯一一个平面。这样得出的三个平面相交于一个且仅一个点，该交点对偶于给定平面。图1.6.3以图式表示出实现该算法的形式运算。坐标轴及其对应线显示为同一种颜色（分别为黄色、蓝色、绿色）。图中显示的是对偶平面和对偶点的构造（显示为红色）。细线用作制图时的辅助线。

即使是三维空间的对偶性变换算法的图形表示也很复杂，更不要说多维空间了。

对多维空间来说，必需对结构进行符号解释并对最终结果进行图像表征。

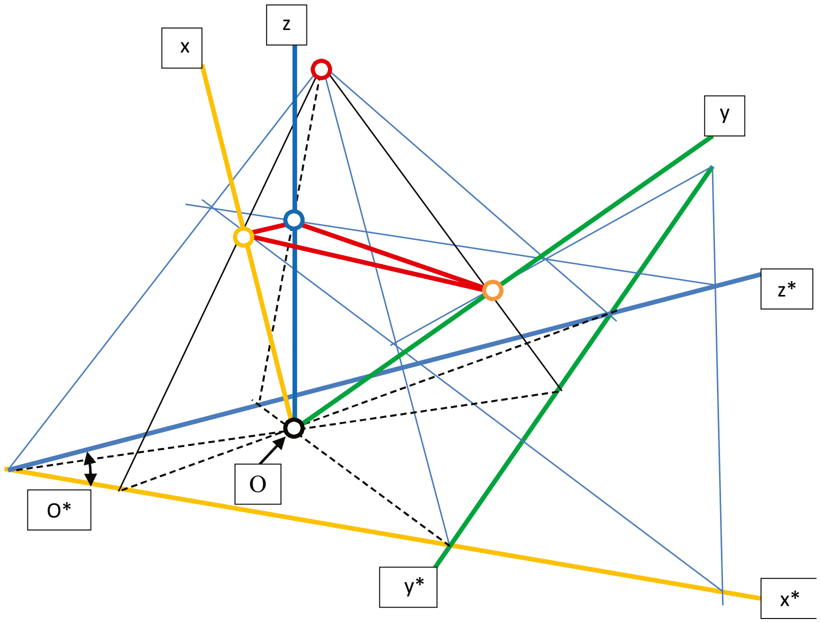

图1.6.3

对偶原理与记录几何算法的集合符号系统相结合，给我们提供了一种非常有效的工具，以便能够处理在构建投影图像时出现的各种问题。

以构建二阶曲线（圆、椭圆、抛物线和双曲线）为例。

图1.6.4显示的是一种有名的投影算法，即通过五个属于该曲线的任意给定点构建椭圆（或任何其他二阶曲线）上任意数量的点。

值得指出的是，在解析几何中，圆、椭圆、抛物线和双曲线分别用不同的方程描述。此外，这些方程取决于给定的坐标系。投影算法的优点是以上列出曲线的投影算法一样，与坐标系完全无关。

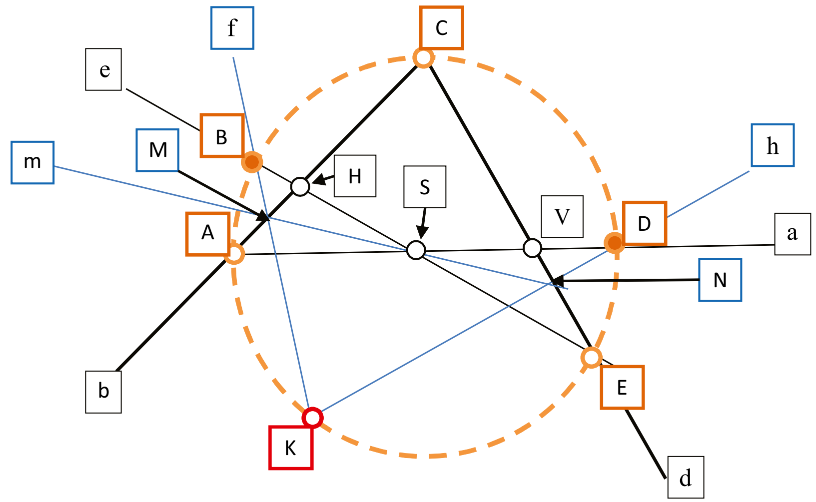

图1.6.4

假设A、B、C、D、E是五个任意给定的点，其中任三点都不在一条直线上。这五点都是完全平等的。在图中这些点显示为橙色。

构造算法可概括为，我们选择任意一对点分别作为两个束的顶点，这样一来，问题被简化为寻找这些束的对应线。所求点由对应线交点得出。

五个给定点中的其余三个点分别确定三条直线，其中任意两条直线可被选择作为两个束中每一个束的透视轴。在图中，点B、D分别是束的顶点，相应的透视轴分别是直线 b ≡ (A ∩ C) 和直线 d ≡ (E ∩ C).。在做完运算 (B ∩ E) ≡ e, (D ∩ A) ≡ a ∩ e ≡ S， 以后，我们会得出点S是束的顶点，其对应透视束包括既束B又束D分别与该束有透视关系（相对于轴b和轴d）。

经过所得出的点S任意画一条直线m（运用符号形象表示为 S ⊃ m ），这一条直线与线b、线d分别相交于M、N两点。然后将这些点与B、 D两点连接后，就得出两条对应直线f、h，这些直线相交得出点K，其属于一个由五点所确定的曲线。通过这种方式，可以构造属于曲线的任意数量的点，因为可以有无数条线穿过点S，其中每条线都对应于曲线上的唯一点。

上述算法可以用符号形象表示为：

$$A \cap D \equiv a$$
$$B \cap E \equiv e \cap a \equiv S \supset m$$
$$A \cap C \equiv b$$
$$E \cap C \equiv d$$
$$m \cap b \equiv M \cap B \equiv f$$
$$m \cap d \equiv N \cap D \equiv h \cap f \equiv K$$

如果省略中间结果的符号，那么可以把算法变得更短些，这样，所使用的符号仅包括给定点A、B、C、D、E，任意给定线m和最终结果K：

$$[(A \cap D) \cap (B \cap E)] \supset m$$
$$\{[m \cap (A \cap C)] \cap B\} \cap \{[m \cap (E \cap C)] \cap D\} \equiv K$$

图1.6.5显示的是经过所得点K的切线k的结构。该结构图没有附注说明。作为练习，建议以符号的形式对构造算法进行描述。

根据对偶原理，我们可以得出结论，如果二阶曲线由五个点完全确定，那么二阶曲线同样也由五条切线确定。得出任意数量的切线与切点的算法完全相同。只需要记住，在这种情况下，点对应线，线对应点。不必使用符号*来区分给定的元素和对偶元素。

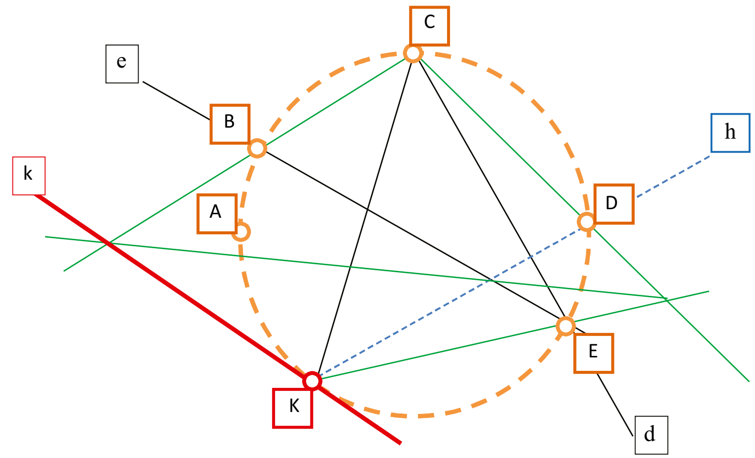

图1.6.5

图1.6.6显示的是一个由A、B、C、D、E五条切线所确定椭圆的切线K的构造法。

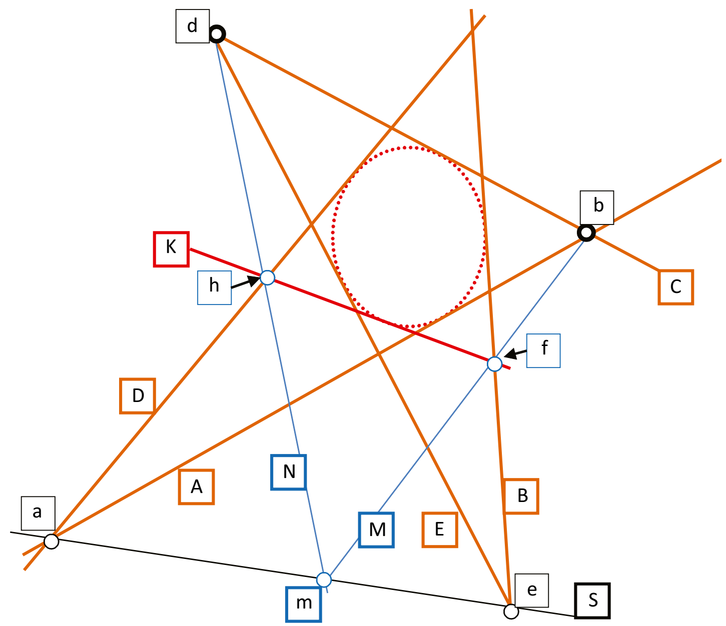

图1.6.6

通过对偶于图1.6.5所示的构造可找到构造切线上的切点。

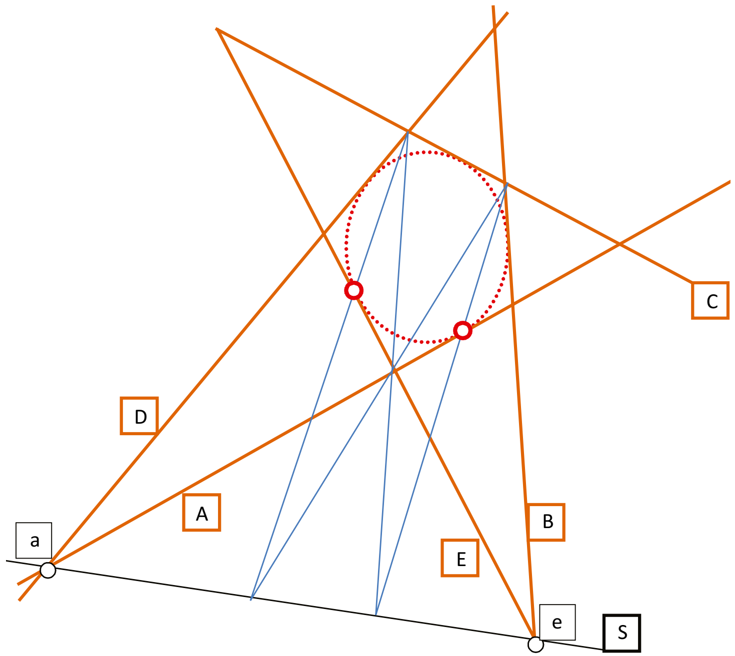

图1.6.7

图1.6.7显示的是在两条给定的切线上构造两个切点的方法。如果我们构建所有的切点，并把这些切点用直线连接在一起，我们将获得以下流畅构图（如图1.6.8所示）。这种构图可用于解决与构建二阶曲线有关的一系列问题。

我们再次强调，上述所讲的算法都毫无差别、毫无例外地适用于所有二阶曲线。如果五个点或五个切线中的一个被设置为无限远，那么我们会得到一个抛物线，如果两个点被设置为无限远，那么我们会得到一个双曲线。

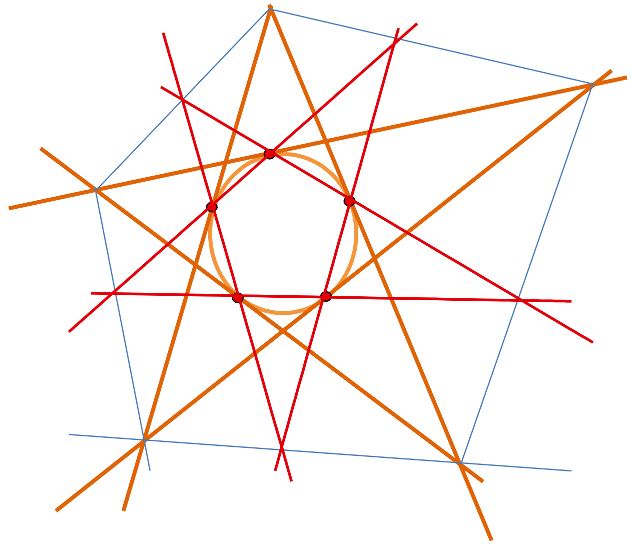

图1.6.8

同样，可以以类似的方式使所有已知定位算法形式化，得出相关的对偶性算法。

II.平面上的投影图

平面投影图像被广泛的应用于科技与艺术领域。这是由于谁都可以比较轻松地构造并感知这些图像。这些图像浩如烟海。在平面图像中有一个特例就是线性投影图像。构造这种投影图的三维投影机理极其简单，其由一个平面和一个不属于这个平面的点组成。承影面统称为图片平面或简称为图片；投射线的起源点统称为投影中心或视点。

根据投影中心相对于画面平面的位置，一般分为以下三种类型：

——平行投影，又叫正交投影（正轴测投影），是指投影线垂直于画面的投影。

——斜轴投影，其是指投影时投影线彼此平行且与承影面倾斜成任意角度的一类投影。

——中心投影，又叫透视投影，是投影时所有的投影线都从三维空间一个任意点投射，该任意点位于距画面的有限距离位置。

最常见的投影类型是中心投影。正交投影是斜平行投影的特例，而斜平行投影又是中心投影的特例。

2.1.正交投影

平行投影，又叫正交投影，是指投影线垂直于投影面的投影。垂直于同一平面的所有垂线都是平行的，并且相交于无穷远的一点。因此，正交投影机理体系由一个图片平面和一个垂直于图片的平行直线束组成。在这种情况下，视点在无穷远处。

日常生活中，我们所看到的物体并不是正交投影的结果，因为我们总是从有限的距离看到一切。在卫星照片上以及在使用望远镜仰望宇宙中的遥远物体时，可以看到非常接近正交投影的图像。

尽管如此，在所有现有投影视图中，正交投影视图具有广泛的实际应用范围。这是由于它们足够简单易懂。其实，设计或技术文档中的大部分图形组件都以正交投影视图为主。

在视觉艺术中，正交投影在古代被广泛使用，随后正交投影法事实上被轴测投影法和透视投影法所取代。19世纪末20世纪初，一些艺术流派（立体主义，建构主义，至上主义等）又重新使用正交投影法。但即使不直接使用正交投影，许多艺术家也在准备阶段使用正交投影作为一种简单方便的绘制工具，使他们能够解决许多实际问题。

正交投影的一个重要优点是，与画面平面平行的线段或平面图形都会以全尺寸投影到其上。

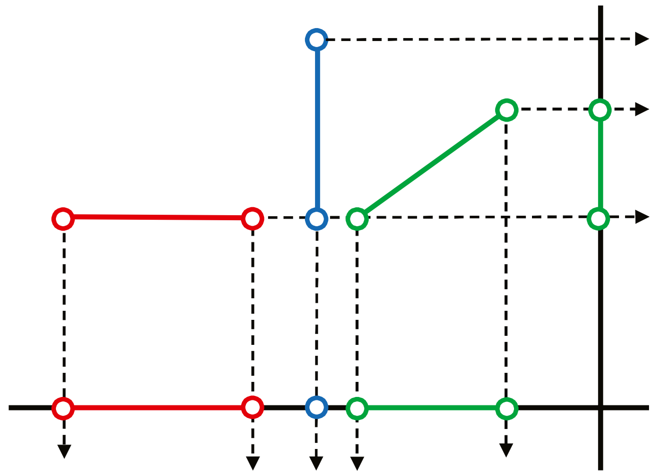

图2.1.1

图2.1.1显示的是三个相等的线段（分别显示为红色、蓝色和绿色）的正交投影，这些线段相对于两条相互垂直的承影线的位置不同。与水平承影线（显示为红色）平行的线段以全尺寸投影到其上。垂直于承影线（显示为蓝色）的线段投影于一点。如果线段相对于承影线（显示为绿色）位置处于任意位置，那么该线段投影表示为直角三角形的边，被投影的该线本身形成这种直角三角形的斜边。因此，线段的两个正交投影可以用于确定其真实尺寸。如同从已知两边求斜边的长度一样。线段的正交投影尺寸应该等于或小于其真实尺寸。

原则上，可以从透视图像和任何其他投影图像求线段的长度，但这个算法更复杂。正交投影在实践中得到了普遍使用，这是因为从物体的投影求其真实尺寸，这种方法算起来比较简单。

要在平面上画三维物体时，主要是用二正交投影面定位的正投影法（蒙日法）。该方法的实质是，将一个三维物体正交投影到两个相互垂直的平面上，然后将它们组合起来。这样在绘图中三维空间中的每一点都有两个投影。于是，空间中的每一点就由两个投影描画在直线上，而这些会在无限远处相交于一点（即平行线）。

于是，在空间中的三维点集与这些点的投影对的三维集合之间有一对一的对应关系。

由于两个不同点可以确定一条直线，所以分别对应于这两个点的两对投影也可以确定一条直线。三个不同点可以确定一个平面，所以在正交绘图中，三对投影也可以确定一个平面。任何空间定位问题和度量问题都可以在平面上解决。

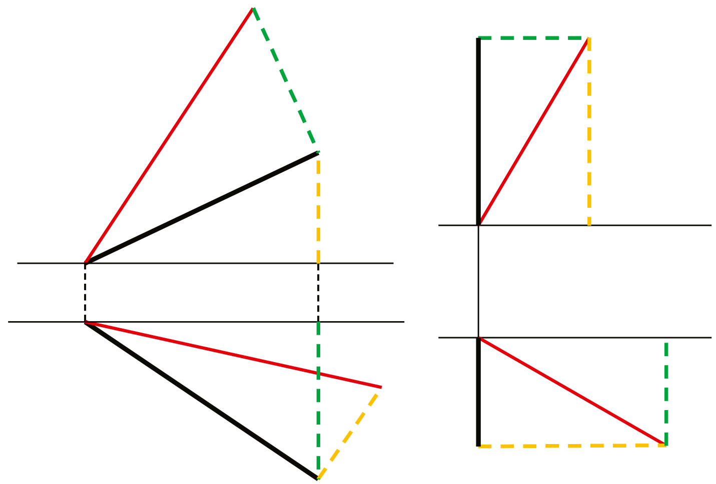

图2.1.2a，2.1.2b

图2.1.2a、2.1.2b显示的是两条直线段的正交投影对。在第一种情况下，线段相对于投影平面处于任意位置。在第二种情况下，线段

位于垂直于投影平面的平面中。通过投影尺寸换算出这些段的真实尺寸以红色显示。

如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，则称这条直线和这个平面及其内的所有直线互相垂直。垂直于同一平面的所有垂线都平行。

如果两条相互垂直的直线中有一条直线平行于图片平面，那么这些直线的正交投影也互相垂直。

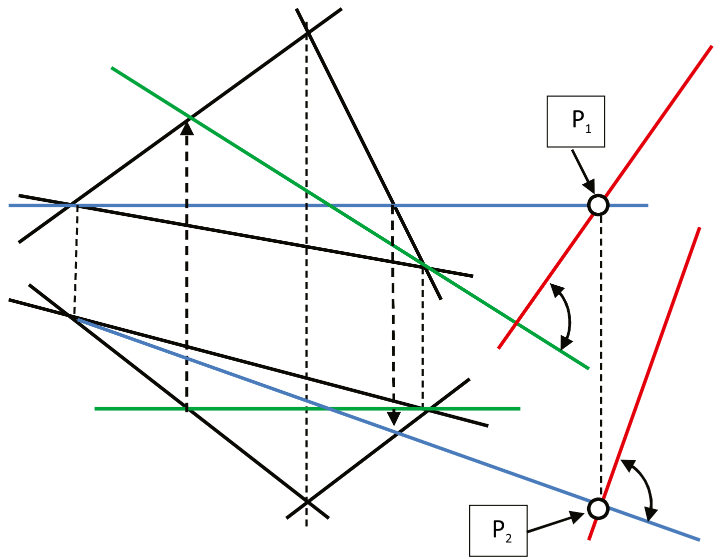

图2.1.3

基于这两个原理，在正交投影中，可以做一个平面的正交投影面垂线。图2.1.3显示的是一个由三个点确定的平面，通过这三个点画出三条直线。同时做该平面垂线的两投影（显示为红色），并确定该垂线与该平面交点的投影P_1和投影P_2。其中一个投影垂直于水平

直线（显示为蓝色）的投影，另一个投影垂直于正面直线（显示为绿色）的投影。

图2.1.4显示的是两个同等大小的立方体的两对正交投影，这两个立方体相对于投影面处于不同的位置。在第一种情况下（在左侧），立方体的所有面都平行或垂直于投影平面。与投影平面平行的面都以全尺寸投影到其上，并且两个投影都是同等大小的正方形。

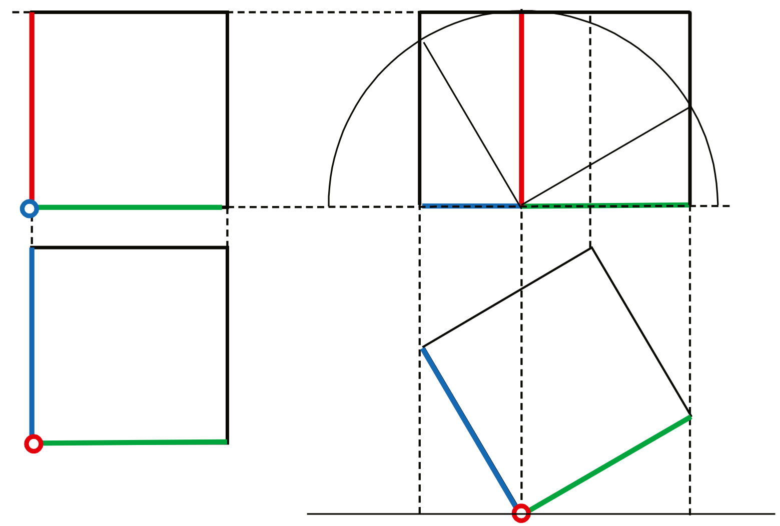

图2.1.4

在第二种情况下，只有立方体的水平面平行于水平投影面。立方体的垂直边以全尺寸投影到垂直平面上，而水平边投影到水平平面上。水平边的垂直投影等于直角三角形的直角边，其中斜边是立方体的边。因此，可以在一个正面投影上进行构建，如图所示。

图2.1.5显示的是构造立方体的正交投影的方法，立方体相对于投影平面处于随机的位置。

三条互相垂直的坐标轴（分别用红、绿、蓝三种颜色表示）的投影是任意设置的。红轴上的单位线段（显示为粗线）也是任意设置的。为了在蓝色轴和绿色轴上分别构建单位线段，应该构建一个三角形，三条坐标轴是这一三角形的的高（三角形的大小无关紧要）。通过在三角形边上构造两个半圆，我们可获知在蓝色轴和绿色轴上的单位线段的尺寸。以加粗的黄线显示的线段的大小彼此相等，并且等于单位线段（立方体的边）的实际尺寸。

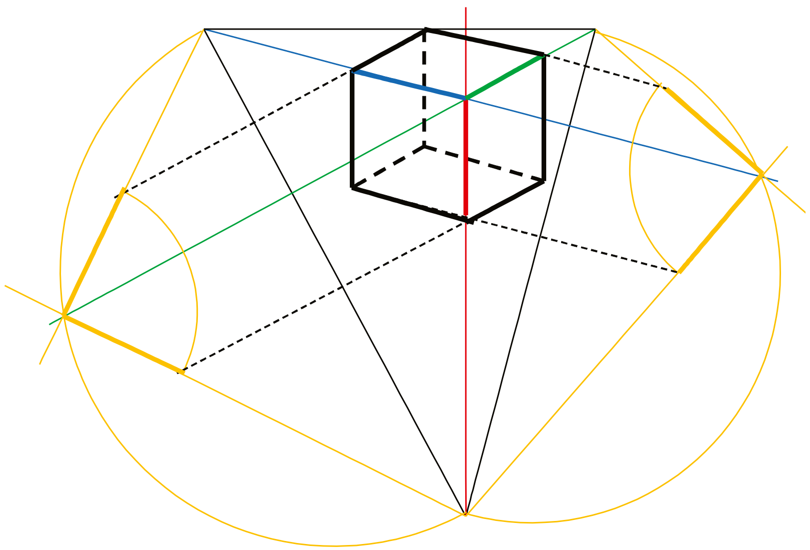

图2.1.5

所以，正交投影或正轴测投影法的基本定理，可表述如下。

正轴测投影性质决定于所给定的三条坐标轴（立方体的边）的三个投影（它们之间的角度大于或等于直角），以及一个单位线段在其中一个轴上的任意投影。

一般而言，轴投影之间的角度可以是任意的，但必须大于直角。在极端情况下，如果角度等于直角的话，那么问题解决方法如图2.1.4所示。

2.2.平行投影或轴测投影

正交投影法是所有投影线相互平行并垂直投影面的投影法，与正交投影法不同,在平行投影法中，只要满足投影线相互平行的要求。投影线相对于图片平面的倾斜角度是可以任意设定的。换句话说，在平行投影中，三维空间中无穷远平面上的任意一点都可以作为投影中心。

因此，平行投影法比正交投影法的投影应用范围更广泛，而正交投影是平行投影的特例。

非常接近平行投影的图像就是被阳光照射的物体以任意角度落在平面上的阴影。由于地球到太阳的距离远大于地球的视距，因此，太阳可以被认为是无限远的照明源或无限远的投影中心。投影的概念很有可能最初起源于对阴影的观察。

当用平行投影法对线段进行投影的时候，其投影长度可以从零变化到任意大的数值，这取决于投影中心与图片平面之间的相对位置。还值得指出的是，一条线段的投影长度可以任意大，但不能无限大，因为在这种情况下，投影线必须平行于图片平面。这样的线在无穷远点处与图片相交。投影中心原来位于图片平面内，线段上所有点的投影都重叠在一个点上（图片平面通过投影中心）。

图2.2.1是示意性地示出了上述做法。其中一个线段（显示为红色）通过三个无限远的中心（显示为蓝色、绿色和黑色虚线）投影到图片线（显示为黑色）上。在第一种情况下，投影中心和线段在同一直线上，线段投影于一点。在第二种情况下，投影线与图片成任意角

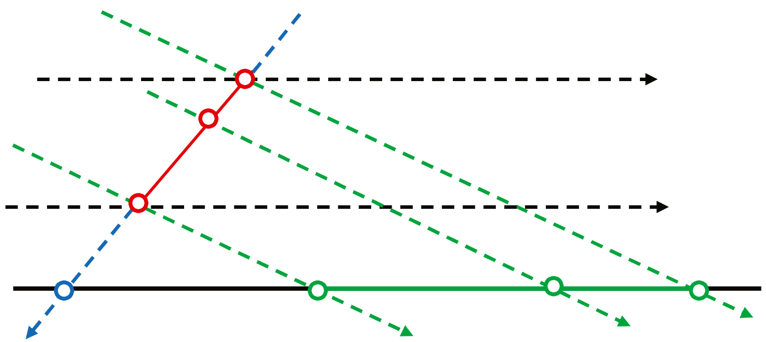

图2.2.1

度，线段的投影也是线段。投影越长，投影线与图片的倾斜角度越小。在第三种情况下，投影线平行于图片直线，线段上的所有点都投影到这条直线上的无限远点处。

第一种和第三种都是极端情况，除此以外，对于所有其他投影，在线段及其投影之间有比例关系。例如，如图2.2.1所示，红色线段中点分割线段的比例等于绿色线段中点分割线段的比例。

三维空间中最常见的坐标系是笛卡尔直角坐标系。该坐标系是由三条相互垂直的直线（轴）构成的，在其上绘制三条相等的线段，作为测量单位。将笛卡尔坐标系平行投影至平面，这样得到的图称为轴测投影图。

根据轴测投影基本定理（波尔克许华尔兹定理），**平面上从一个点引出的任意三条线段，总可以作为三维空间三条互相垂直且相等线段的平行投影（直角正四面体）**。

因此，要设置轴测图，只要设置三条穿过平面上同一点的任意直线（轴）就足够了，在其上任意截取三条单位线段。之后，任何定位问题和度量问题都可以直接在平面上解决。

给定的直线可能不会穿过一个点，但总能通过平行移动使这些直线在一个公共点处汇合。应该注意后一种情况，因为在解决逆问题时，通过现有图像（例如照片）尺寸换算出真实尺寸，其中已知尺寸的线段可能不是相交而是交叉的。

图2.2.2显示的是在直角正四面体与其任意平行投影之间建立对应关系的方法之一。

轴测投影是通过直角正四面体的两个给定正交投影来建构补充任意投影（高克方案）。在正交投影和轴测投影上都有相对应的四面体或立方体的边（坐标轴）互相垂直，并显示为同一种颜色（分别为红色、蓝色、绿色）。任意设置两个透视轴和两对平行束。补充轴测投影上的点位于这些束的对应线相交处。

根据这个方案，还可以解决逆问题，即在任意平行投影（轴测投影）与三个互相垂直且相等的线段的两个正交投影之间建立投影关系。

如图2.2.2所示，在轴测投影和正交投影上，相应线段上的棕色点和黄色点将其等比例分割，从而可以确定透视投影束的方向，并在这些束的对应线相交处确定透视轴的位置。

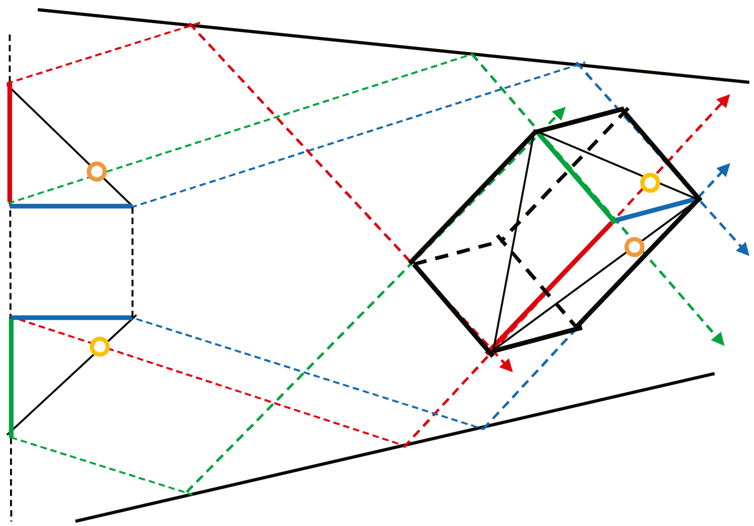

图2.2.2

因此，可以在任意三个坐标轴上截取任意三条单位线段，以构建立方体的斜轴测投影。立方体的任意三条相邻边都可作为坐标轴。

最简单的斜平行投影是两个坐标轴与图片平行。在这种情况下，单位立方体的两个平行面以全尺寸投影。在投影上，第三坐标轴的方向及其上的单位线段大小可以是任意的。图2.2.3显示的是一个立

方体的轴测投影，其中两条边是垂直的，第三条边是直角的角平分线。沿蓝轴的单位线段的大小设定为单位正方形的对角线的一半。

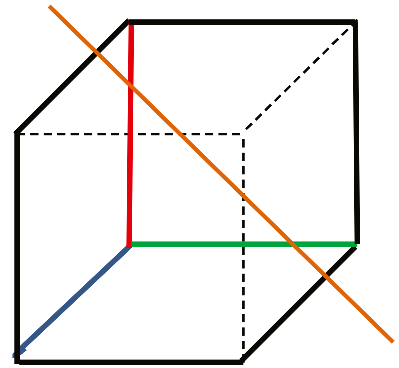

图2.2.3

这种设置大大简化了构造。例如，一条平行于正方形对角线的直线（显示为橙色）将所有相交的单位线段等比例分割。

圆在平行投影下可能为圆（如果其所在的平面与图片平行），也可能为椭圆。正方形可能为正方形，也可能为两组对边分别平行的四边形（矩形或平行四边形）。椭圆的构造可以通过建立一个正方形内切圆与其轴测投影之间的共线对应关系来进行。之后，对圆上的各点求出轴测投影中的对应点即可。这种方法最容易理解，但使用起来不是很方便。为了实现该方法，有必要绘制一个圆，并将圆上各点转移到轴测图上。

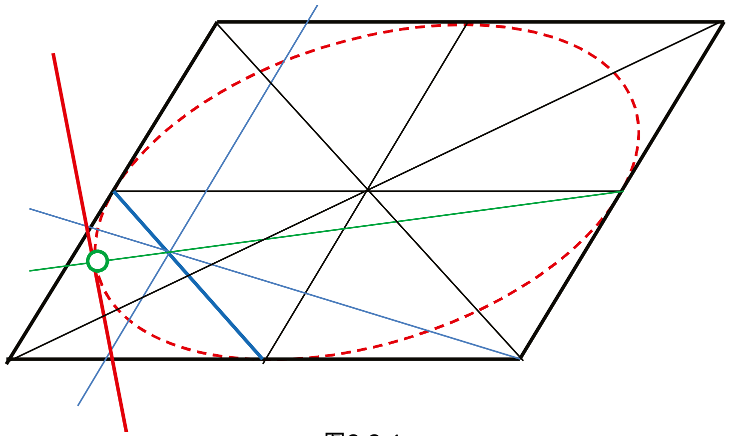

图2.2.4

还有更简单有效的方法，可以直接在轴测图上构建圆的轴测投影。例如，如2.2.4所示的构造法。在没有圆规的帮助下，可以构造椭圆上任意数量的点和这些点的切线。

在以加粗蓝线显示的直线（内接四边形的边）上，选择一个任意点，通过该点画出三条直线（两条蓝色细线和一条绿色线）。蓝色线与四边形边的交点决定切线（显示为红色）的位置。绿线与切线的交点决定切点的位置。椭圆的其余四分之三可通过类似或对称方式完成。

2.3.透视投影或中心投影

在所有的投影图像中，透视投影最接近于真实世界的投影方式，这是因为人眼的成像原理基于中心投影法，通过晶状体聚焦至视网膜上的图像就是透视的图像。基于此，透视在实践中被广泛用作创造视觉图像和艺术作品的理论基础。

中心投影（透视投影）机理极其简单，其由一个平面或其他表面（图片）和一个不属于该表面的点（又称投影中心、视点）组成。

如果图片是一个平面，那么直线在图片上的投影也是直线，这种透视法称为线性透视法。通过投影中心S（视点）的一条直线p与画面π垂直相交的一点叫线性透视的主点P（如图2.3.1所示）。投影中心到主点之间的距离P–S称为相隔距离d（在图中该线显示为红色）。

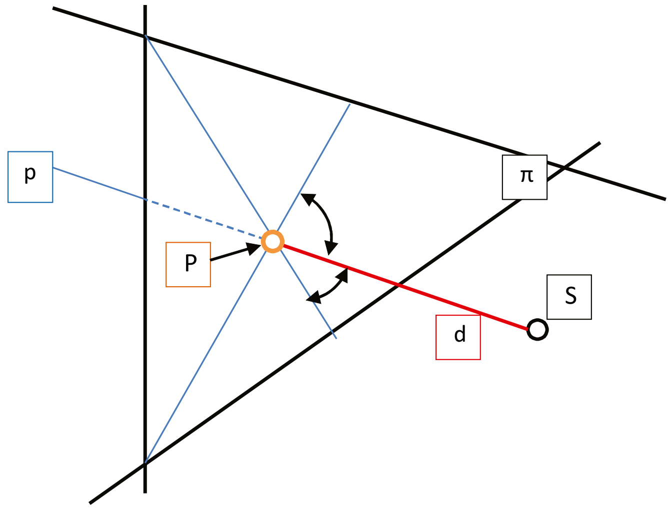

图2.3.1

这样一来，要在图片上形成线性透视机理，只要设置两个点就足够了，其中包括图片上的主点和一个远离主要点的任意点。我们可以直接或者间接地设置这两个点。

传统上，地平线被认为是通过投影中心的水平面与画面相交的一线。图片的底线是图片与水平面相交的边界线，但这完全无关紧

要。画面中任何经过主点的直线都可以作为地平线，同时任何与所选地平线平行的直线都可以作为图片的底线。

试分析通过二正交投影构造物体的方法。可选择一个立方体作为图形对象，因为使用它的图像作为坐标系，可以构建任何图像。

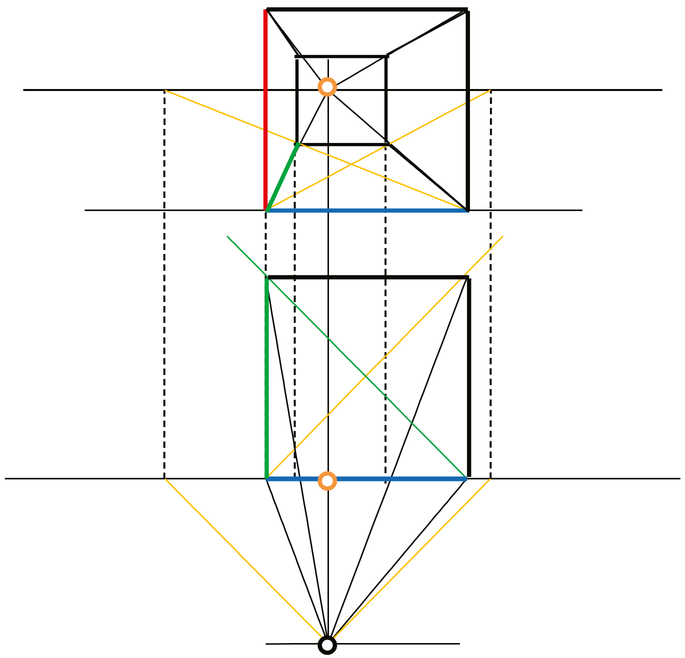

图2.3.2

所谓的正面透视是透视构造的最简单类型。如果图片平面与投影的垂直（正面）平面平行，那么其在水平面上的投影是一条水平线。在这种情况下，构造一点透视的问题被简化为构造三条直线。

图2.3.2显示的是构造立方体透视图的方法，立方体的前平面与图片正面重合，从而在正投影面上直接形成立方体透视图，图像无失真现象。

要获得某一个物体的各种透视图，就可以或是相对于一个静止物体来移动视点，或是相对于一个静止视点来移动物体。这两种方法完全相等，并可得出相同结果。所以，当物体相对于视点进行移动旋转时，可在正面图片上形成它的任何透视图。

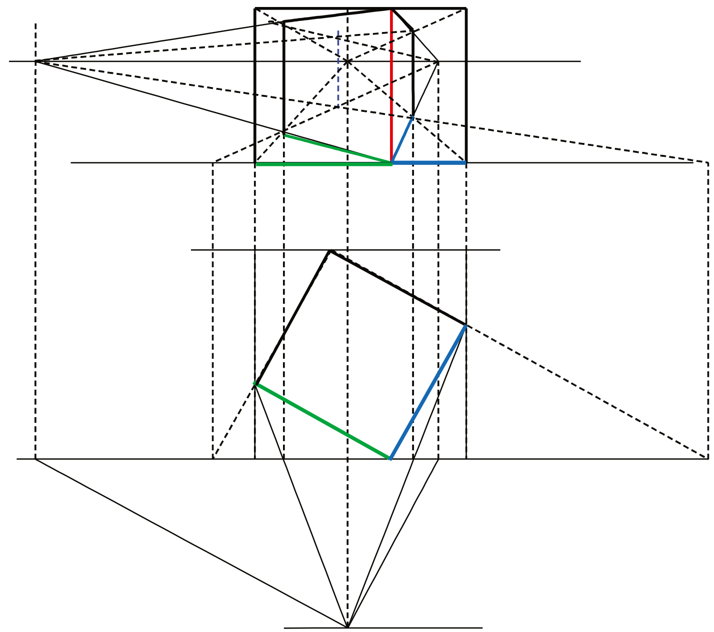

图2.3.3

图2.3.3显示的是构造图立方体透视图的方法，图中，立方体正交投影相对于图片正面成任意角度，从而在正投影面上直接形成立方体透视图。

构造内景和外景同样可以使用上述透视图的构建方法。图2.3.4显示的是构造矩形房屋内景的方法，图中，房屋相对于画面成任意角度。

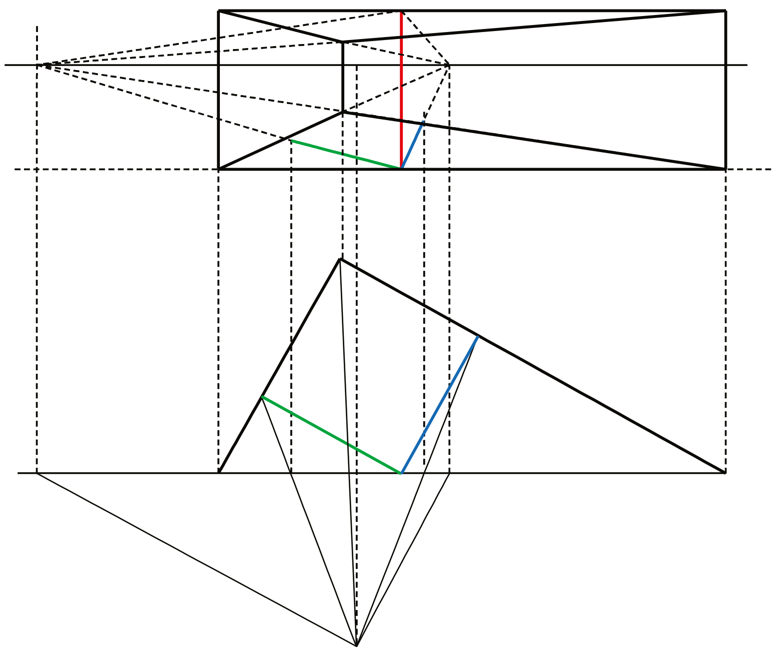

图2.3.4

利用两个正交投影构建透视图的方法，对画家来说不是很方便。这之所以发生，是由于画家在描绘物体时没有物体的正交投影。让我们考虑一种直接在画布上进行所需透视描绘的方法，无需借助正交投影。

任意设置图片上的主点P，通过该主点任意画出一条无穷远直线的投影h，在其上设置点F，这一点离主点隔着一段距离，就是相隔距离（PF等于从投影中心到图片的距离）。线h一般绘制成水平，并称为地平线，图2.3.5中，这三条线显示为橙色。

如果任意设置一条直线及其上的两个点，那么可以唯一地确定透视投影的机理，从而，任何定位问题和度量问题都可以直接在图片上解决。

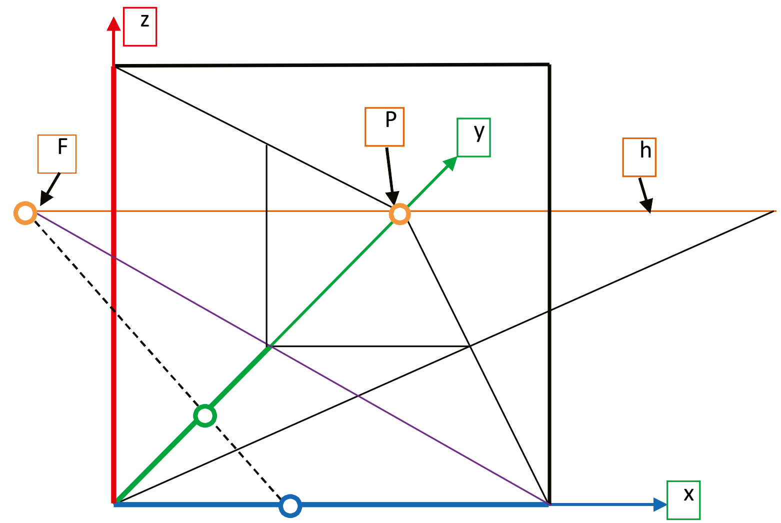

图2.3.5

让我们在画面中设置一个任意的正方形，其中一条边平行于地平线。这个正方形的一边作为计量单位。从正方形的每个顶点到主点所画的直线垂直于图片平面。从正方形顶点到远距点所画的一条直线（显示为紫色）与图片成45°角，所以，这条直线是位于水平面的正方形的对角线，从而我们能够在水平和垂直平面上构建正方形的透视图。

这样一来，就形成了最简单的透视坐标，其中在沿两个轴的方向有等分测尺，并只在沿一个轴的方向才有透视测尺。任何穿过远距点的直线都平行于正方形的对角线，并在水平测尺和深度测尺上截取真实大小同等的线段（如图2.3.5所示）。因此我们可以确定一个属于透视正方形的点的真实坐标。

由于原始正方形和透视正方形有一条公共边，因此可以在它们之间建立同调对应关系。为此，要把成对的对应顶点用直线连接起来，直线的交点作为同调中心。这些正方形的所有对应点都在通过这个中心的直线上。

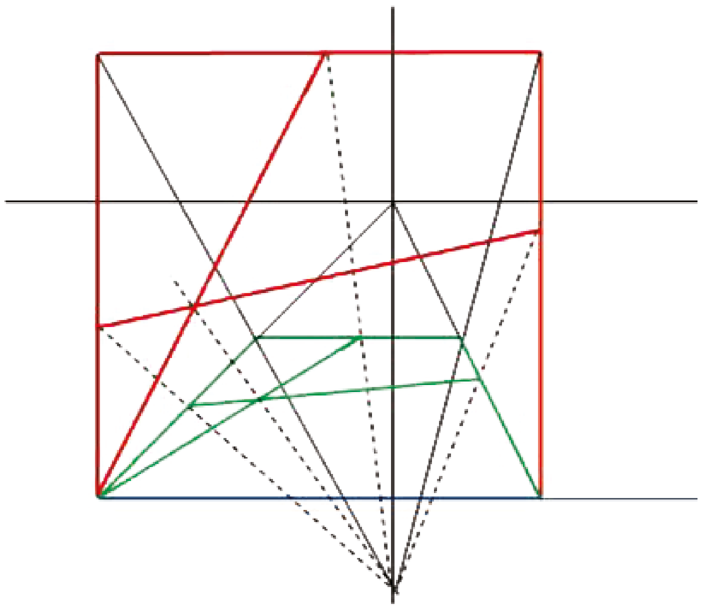

图2.3.6

图2.3.6显示的是两条任意直线以透视形式构造的方法，这两直线对应于图片平面中的两条直线。

如果不仅翻转坐标立方体，而且相对于图片任意倾斜，那么在正面图片中就可以得出所谓的倾斜图片平面上的透视图。不过，当一个立方体相对于投影平面呈现任意角度的时候，较难以构造这一立方体的正交投影图。采用组合的方法更简便，这时，立方体的边是垂直的，图片垂直于投影的垂直平面并且任意地倾斜于地平面。

在倾斜的图片平面上，利用二正交投影构建透视图像的方法，以及在垂直图片上构建透视图像的方法，这两种方法原则上没有区别。在这两种情况下，一律需要得出投影直线与图片平面的交点。

如果一个平面垂直于投影的垂直平面，那么这一平面在其上的投影一定是直线（合流投影）。从而可以更加轻松地得出投影直线与图片平面的交点。

一般而言，倾斜的图片平面通常没有退缩投影，这使得很难找到构造所需的交点。如果我们假定的是一个倾斜平面垂直于投影的垂直平面，那么这一倾斜平面在其上的投影一定是直线，这样问题就简化了。

图2.3.7显示的是图片平面垂直于投影的垂直平面，图片平面在其上的投影一定是直线。假如一个任意点A的位置决定于两个投影A_1–A_2，构建这一任意点的两个图片投影$A_{3.1}$–$A_{3.2}$的图形算法如图所示，这可简化为构建三条直线（显示为蓝色）。

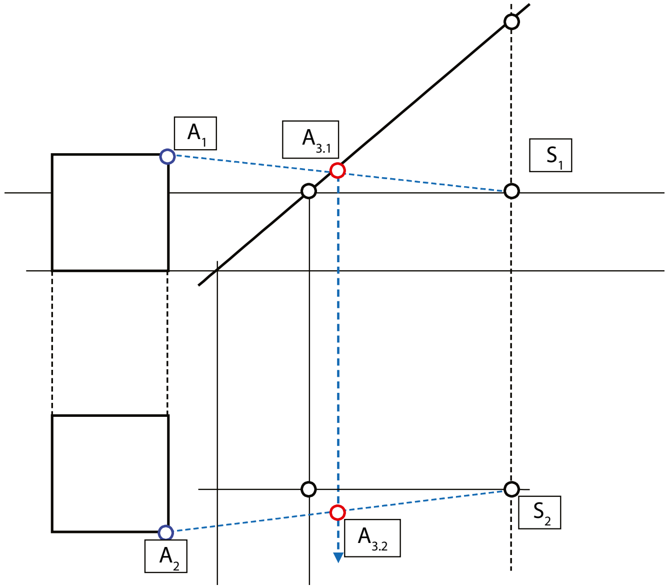

图2.3.7

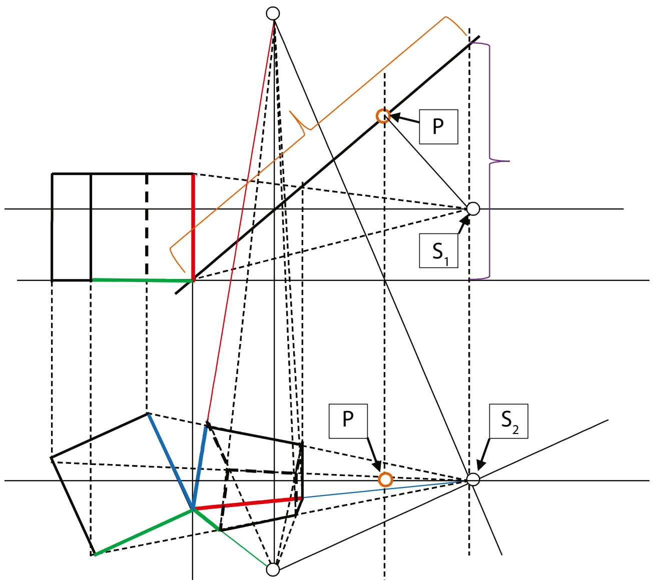

图2.3.8

图2.3.8显示的是构造一个立方体的透视投影的方法，该立方体相对于图片呈现一定角度。在顶视图中构建了立方体的顶点和边后，我们得出了它的透视图，其高度被压缩。

要构建该图像与实际相符的视图，则其高度尺寸决定于图片的垂直投影（真实的高度尺寸值以橙色括号突出显示）。

图2.3.9显示的是透视图像，其高度为全尺寸。立方体平行边的三个遁点形成无穷远三角形的投影。这个三角形的高相交于主点，因此，这些高的基点作为三个相互垂直的平面的主点。这使得可以通过在其中一个轴上任意截取出单位线段，来构建其沿其他两个轴的投影，从而可以制定基本透视定理。

中心（透视）投影决定于三个相互垂直坐标轴的任意投影、这些轴上无限远点的三个任意投影，以及其中一个轴上单位线段的任意投影。

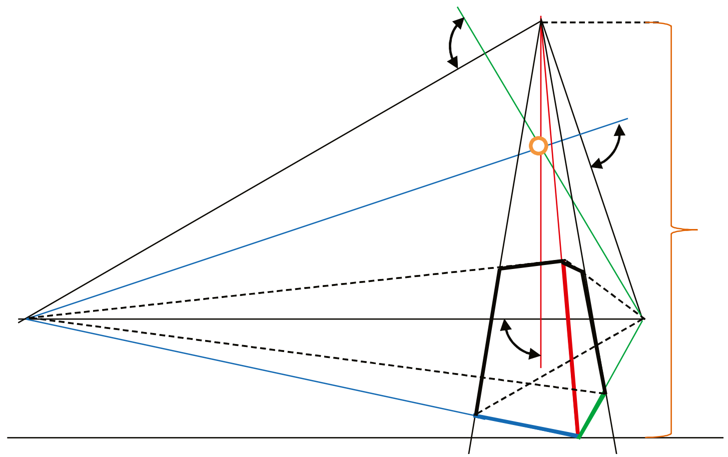

图2.3.9

关于这方面更多信息详见[4]。

图2.3.9显示的是立方体的正规几何透视图，如图所示，这看起来很没有说服力。该图像看起来是一种沿垂直方向拉伸的平行六面体。这之所以发生，是因为要正确地感知构建在倾斜平面上的图像的话，那么应该从相同的角度和视点来观看图像，不过我们通常以近似直角的角度观看图像。

为了补偿视觉感知，建议将图像重新投影到垂直平面上（在图2.3.10中以紫色括号突出显示）。所得到的图像更符合我们对立方体的理解。

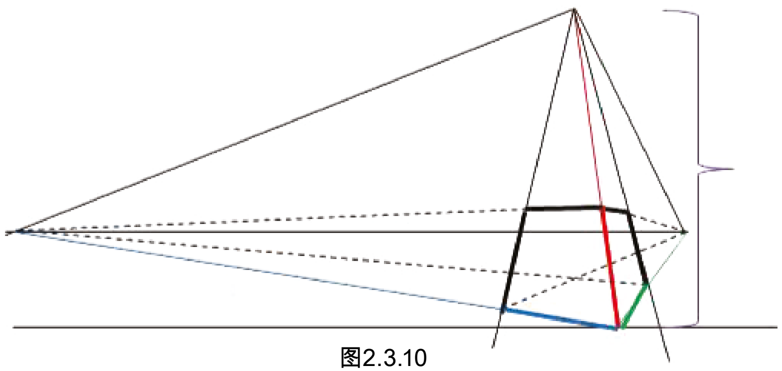

图2.3.10

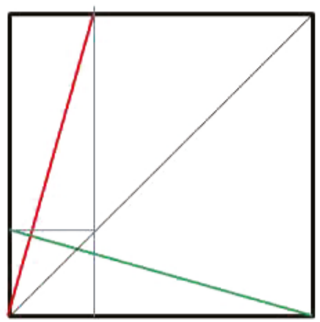

图2.3.11

要以透视形式构造一条垂直于给定直线的直线，那么最简单的方法是使用正方形的特性。图2.3.11显示的是构造两条任意垂直且通过正方形顶点的直线的方法。

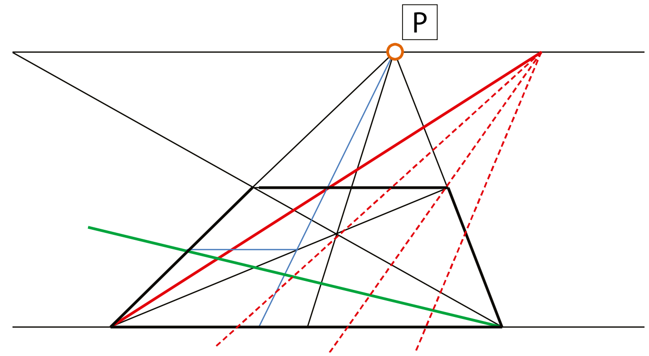

图2.3.12

图2.3.12显示的是类似构建物以透视形式构造的方法。在图中给定图片的主点P，以及正方形的透视图。

如果在透视正方形中设置任意直线（显示为绿色）并完成上述构造，那么可以构造一条垂直于给定直线的直线（显示为红色）。相互垂直的直线束的顶点决定于垂直直线与地平线的交点。这些直线束中的任何两条直线都是相互垂直直线的透视投影。如图2.3.12所示，以红色虚线显示的直线垂直于绿线。

2.3.1.构建一条通往不可到达遁点的直线

事实上，直线的灭点往往远远超出图片的界限。让我们考虑一些算法，可用于构造通过不可到达灭点的直线。

给定有两条直线（图2.3.1.1中用粗线突出显示），这两条直线的交点在图外。要通过任意点（已突出显示的点）必须画一条直线到给定直线不可到达的交点。

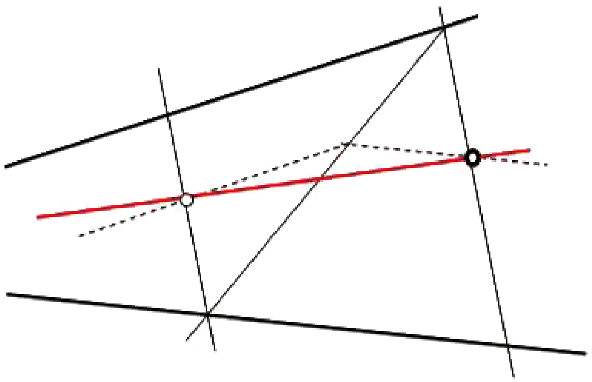

图2.3.1.1

画两条任意平行线，其中一条通过给定点。问题在于将所产生的梯形的平行边等比例划分。在图中显示的是一个可能的解决方案。首先，按给定比例分割梯形的一条对角线，然后把这个比例关系运用到梯形的另一边。通过将获得的点与给定的点连接，我们就会得到所需的直线（显示为红色）。

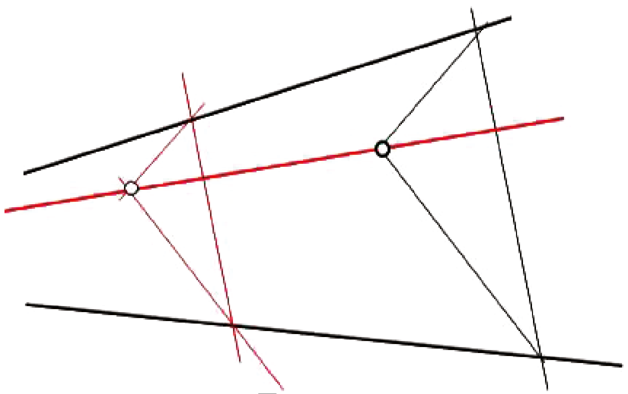

图2.3.1.2

要构造一条穿过给定点和不可接近的灭点的直线，通常使用相似三角形算法。这些三角形的对应边平行且相交于都属于一条无限远直线的三个点。这样，存在着同调关系，其中，无限远直线作为同调轴，不可接近的灭点作为同调中心。所以问题在于构建两个同调三角形，相似三角形法是这个问题的特例（如图2.3.1.2所示）。

一般而言，平面上任何与给定线不重合且不经过给定点的直线都可以作为同调轴。处理这一问题的方法之一，如图2.3.1.3所示。给定的线和点都用黑色粗线突出显示，同调轴显示为绿色。

这个问题也可以根据三角形的高在一点相交的定理来解决。经过

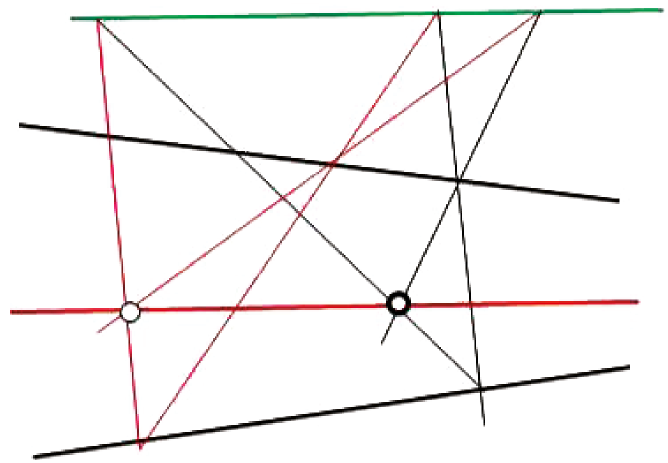

图2.3.1.3

一个给定的点垂线落在两条给定的直线上。垂线的顶点决定三角形的第三条边，经过一个给定的点可画出一条直线垂直落在三角形的第三条边上，这条直线还经过三角形的第三个顶点（即遁点）（如图2.3.1.4所示）。

按照上述定理，可从一个不可接近的点画出一条垂线落在给定直线上。

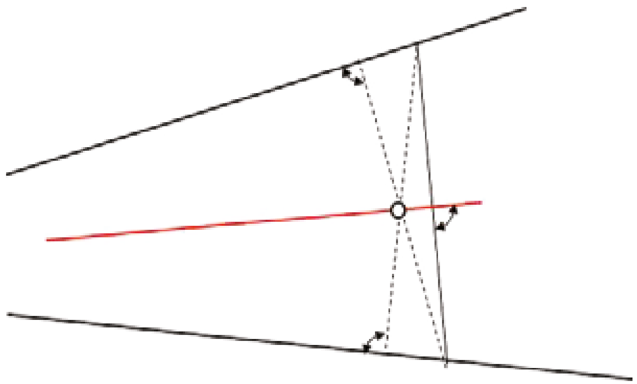

图2.3.1.4

实践中往往会遇到的情况是，正方形或矩形的透视图像的平行边相交于不可接近的灭点。在这种情况下，为了进一步进行各种构造，我们建议首先构建两条穿过对角线交点且平行于边的中间线。

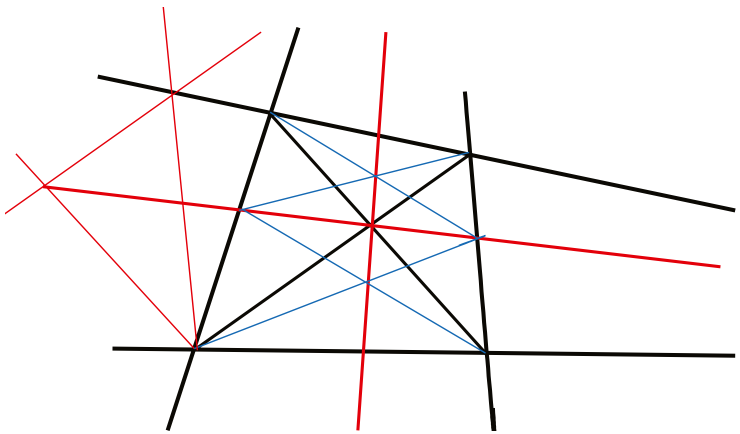

图2.3.1.5

为了解决这个问题，根据上述任何方法，可以经过对角线的交点画一条通往不可接近灭点的直线即可。第二条中间线可以借助于第一条中间线而构建，如图2.3.1.5所示。

在上面的例子中，利用具有平行边的相似三角形来构造中间线。

如上所示，可以通过相对于任意给定的同调轴构造两个同调三角形的方法来解决这一问题（如图2.3.1.6所示）。

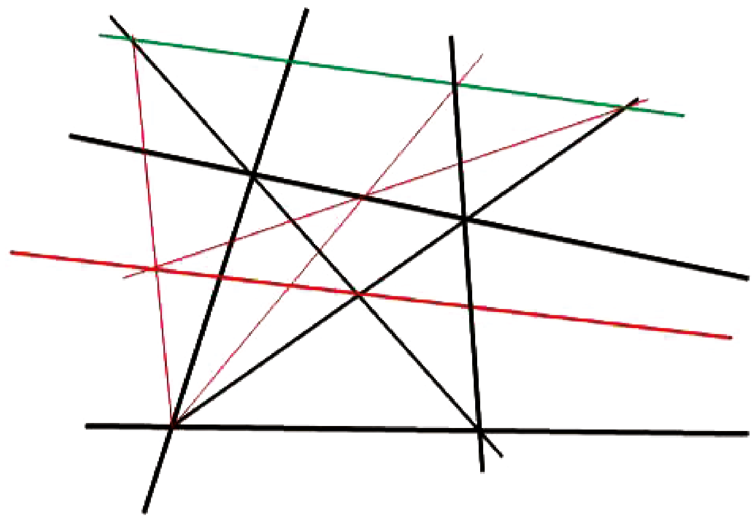

图2.3.1.6

借助于中间线可以简单有效地画出通往不可接近灭点的直线。

如图所示，借助有中间线的给定四边形，可构造无数的平行线和垂线。如图2.3.1.7所示，所构建的两条直线都显示为红色。

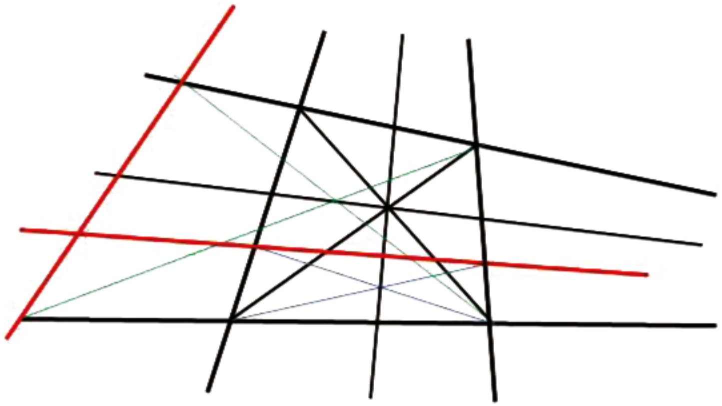

图2.3.1.7

一般而言，问题在于构建一个与给定点同源且同调中心不可接近的点。如有必要，可以在给定的四边形内进行全部构造。

2.3.2.透视基本定理

如上所示，如果在平面上有一个立方体的透视图，该立方体相对于图片平面处于任意位置，那么由此而给出透视图。基于此图像作为坐标系，我们可以在给定透视图中构建任何物体的图像。

如果已知图片的主点，那么只要设置立方体一个边的投影就足够了，以便构建其他边的投影。这种性质使我们能够制定透视基本定理。

我们可以由对应于立方体的三个相邻边的三个任意轴而给出立方体在平面上的透视图。在每个轴上任取一个无限远点的投影，并且在其中一个轴上任意截取单位线段（立方体边）的投影。

通过如图2.3.2.1所示的构建方法，我们可以在其余两个轴上确定单位线段的投影。

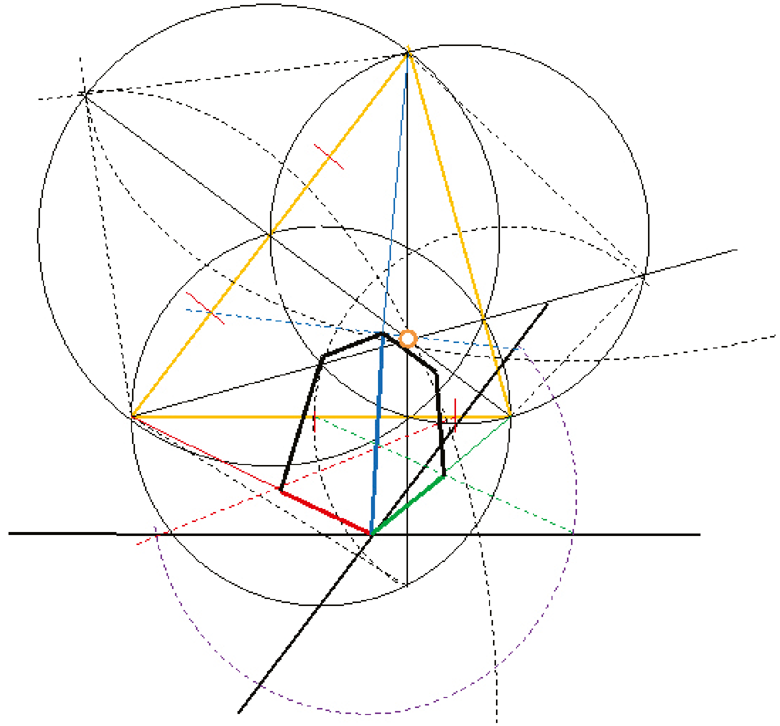

图2.3.2.1

图中任意设置三个坐标轴（分别显示为红、蓝、绿三种颜色）。在每个轴上，分别任取一个无限远点的投影。这三个点构成了一个无限远的三角形的投影（显示为黄色）。在红色轴上，任意截取单位线段的投影，显示为加粗线。

在蓝轴和绿轴上无法任意确定单位线段的位置，只可通过构建法（例如，使用远距圆）而得出此位置。图片的主点（显示为橙色）在黄色三角形高的交点处。值得记住的是，主点离所描绘对象的中心距离越远，其在图片中失真越严重。

2.4.锥线

锥线又称二阶曲线、圆锥曲线，是指圆在中心投影到平面上时所形成的曲线。根据圆与投影机理体系的相对位置关系不同，圆的投影可以是圆、椭圆、抛物线或双曲线。

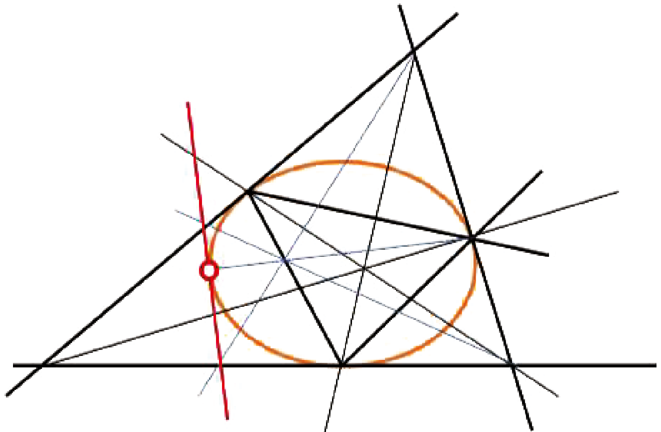

图2.4.1

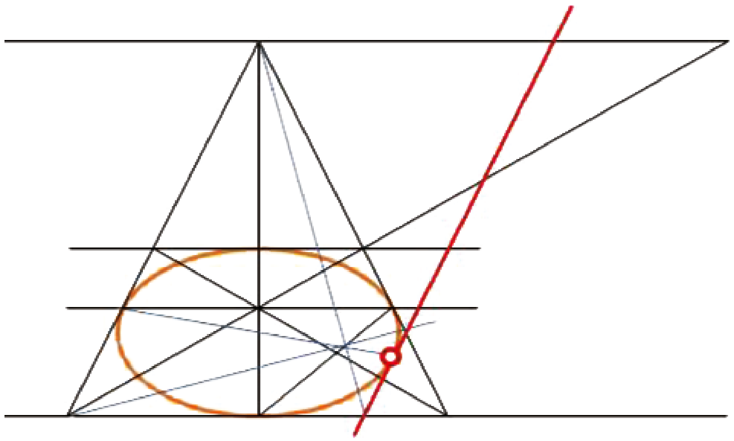

图2.4.2

构造这些曲线的最简单和最通用的方法是内接三角形和外切三角形法。

如果我们在任意三角形中任意设置一个不属于这个三角形边的点，那么将这一点与三角形的顶点连接并得出所形成的连线与三角形对边的交点以后，我们会得出三个点。这些点是给定三角形的内接三角形的顶点。

在图2.4.1中用黑色粗线突出显示的是内接三角形和外切三角形。位于由这些三角形确定曲线上的切线和切点的构造方法在于在内接三角形的一条边上选择一个任意点，并通过这一点画三条直线。图2.4.2显示的是以透视形式实现该算法的方法。

III.空间中投影图像

透视图像和浮雕图像的根本区别在于，前者是指三维空间被映射（投影）到二维图片平面或其他表面上，后者是指三维空间被投影到以某种方式变形的三维空间中。

如果在原始（被投影、真实）的三维空间中使用等分测尺，那么在浮雕（投影、透视）空间中，所使用的测尺变成透视测尺。因此，浮雕可以被认为是三维（立体）透视图，其中真实的无限空间被映射到受浮雕深度限制的空间区域。换句话说，在这种条件下，图片是三维空间。

以上所说均完全适用于舞台布景。但是一般来说，浮雕图像的深度通常远小于其宽度，而透视舞台背景的深度可能会超过其宽度。构造浮雕和透视舞台背景的理论原理是完全一致的。

透视三维图像的构造方法在许多方面类似于平面透视的构造方法。唯一的区别是，使用的是三维图片空间，而不是图片平面。

构建三维透视的一般原理极其简单。需要在三维空间中设置投影中心（视点），并任意设置穿过该中心的四条直线。在这种情况下，任意三条线不得位于同一平面上。在每条直线上，设置任意一对点，其中一个点属于被投影（真实）空间，另一个点属于图片空间。换句话说，在任意四面体棱锥的四条边上，都要分别设置两个任意点。

值得指出的是，任何一个空间中的四个不同点不得位于同一平面上，否则空间透视会变成平面透视。

这样一来，在两个三维空间中的点集之间就建立了一对一的对应关系。如果将其中一个空间作为原始（真实）空间，而另一个作为图片空间，则原始空间中的任何一点都会对应于图片空间中的唯一点，反之亦然。

相互连接的四对对应点，会确定六对对应线。这些对应的线相交于属于同一平面的六个点。这个平面是相等平面，其上的所有点同时属于两个空间。因此，一个相等平面只不过是两个重合三维空间——真实空间和图片空间的交集处。

上述特性极大简化了设置三维透视的方式。具体来说，设置一个投影中心（视点）、一个相等平面和一对位于穿过投影中心的直线上的对应点，就足够了。之后，对于真实（原始）空间的任意一点，都可以找到与其对应的图片空间的唯一点，反之亦然。

图3.1是这种构造算法的示意图。给定投影中心$S_1 \equiv S_2$（视点），相等平面$\alpha_1 \equiv \alpha_2$和一对位于穿过投影中心的二重线$k_1 \equiv k_2$上的对应点A_1–A_2。真实空间中有点B_1，对于这一点有必要构造图片空间中的对应点B_2。符号表示该元素属于某个特定空间。

在这里值得注意的是，位于相等平面上的所有点和线都是相等的。穿过投影中心的直线也同时属于两个空间，但是其上只有两个相等点，其中一个点是投影中心，另一个点是其与相等平面的交点。出于这个原因，这些直线我们称之为二重线，而不是相等线。

通过点B_1和A_1我们画直线m_1一直到该直线与相等平面$\alpha_1 \equiv \alpha_2$相交。我们将得到的相等点$L_1 \equiv L_2$与点A_2连接起来，得到对应于m_1的线m_2。把点B_1连接到投影中心$S_1 \equiv S_2$以后，得出直线$h_1 \equiv h_2$，所需的点B_2一定同时位于直线m_2和h_2上，因此，其位于这两条线的交点上。

该算法可以用符号形象表示为：

$$B_1 \cap A_1 \equiv m_1 \cap (\alpha_1 \equiv \alpha_2) \equiv (L_1 \equiv L_2) \cap A_2 \equiv m_2$$
$$(S_1 \equiv S_2) \cap B_1 \equiv (h_1 \equiv h_2) \cap m_2 \equiv B_2$$

符号$B_1 \cap A_1$或$(S_1 \equiv S_2) \cap B_1$不应理解为两点的交集，而应理解为穿过这些点的两组直线集合的交集[7]。通过这些点的直线属于两组直线集合，因此是两个集合的交集线。

由于上下行中都有参数m_2，所以该算法的内容可被缩略成一行：

$$B_1 \cap A_1 \equiv m_1 \cap (\alpha_1 \equiv \alpha_2) \equiv (L_1 \equiv L_2) \cap A_2 \equiv m_2 \cap [(S_1 \equiv S_2) \cap B_1 \equiv (h_1 \equiv h_2)] \equiv B_2$$

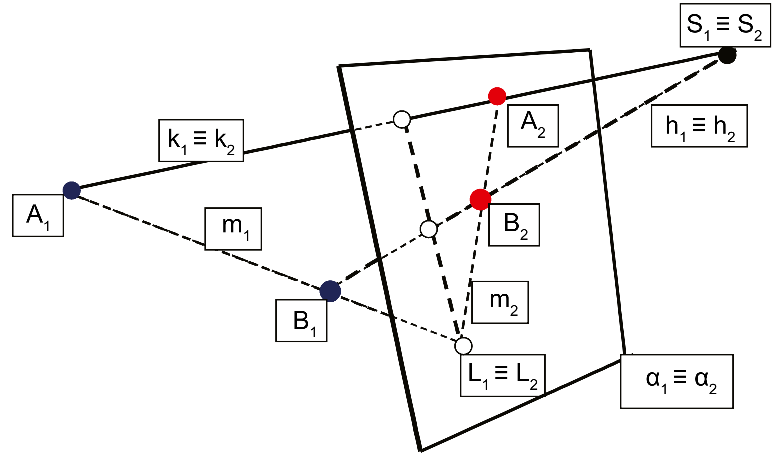

图3.1

由此可知，无论在何处设置一对对应点，设置在相等平面的一侧还是两侧，得出其他对应点的算法保持不变。从理论上说，任何一点，无论其在何处，都可将其归于投影空间或被投影空间，且对其构造对应点，就像无论点在观察者面前还是背后，都会被投射到平面上。

事实上，立体图像仅会形成于受浮雕或舞台深度限制的空间区域。在这种情况下，仅投射出真实空间的一部分，显示在观察者前面且在相等平面后面。因此，以下的构建方法仅针对这部分投射空间的构造。

从理论上说，在某种透明的材料内可以进行立体透视的设置，这种透明的材料作为图片空间。这需要一种立体材料，该材料任何部分都可以根据我们的要求变得不透明或有色，为实现这一目的，还需要相关技术。那么在立体材料结构上对三维物体进行建模时，

将不会出现设计限制，立体（三维和多维）绘图和在透明材料内部绘图（立体绘画）将成为可能。

例如，如果将墨水或液体颜料滴在平静的水中，那么会形成无规律的立体图像。这种图像甚至可以通过水冻结来固定。

3.1.浮雕和圆形雕塑

由于一对对应点的选择是完全随意的，所以真实空间中的一个点可以被指定为无穷远。在这种情况下，如果一个平面平行于相等平面且通过一个与真实空间的无穷远点对应的图像空间点，那么该平面也对应于真实空间中的无穷远平面。

这样的平面称为**极限平面**。该平面中的任何一点都对应于原始（真实）空间的无穷远点。

因此，要设置空间透视，设置一个视点（投影中心）和一对平行平面（相等平面和极限平面）就足够了。浮雕或舞台空间的深度均决定于相等平面和极限平面之间的距离。通常相等平面离观察者更近，而极限平面离观察者更远。

图3.1.1显示的是实现这种构造算法的最简单的方式之一。

该构造是基于两个正交投影进行的。为简化构造，相等平面和极限平面被指定为垂直于投影的正面和水平面。所以这两个平面在正面和水平面的投影就是两条剖面线。

在图中，相等平面$\alpha_1 \equiv \alpha_2$显示为黑色粗线，极限平面β2显示为绿色。该真实映射空间中的极限平面对应于无穷远平面β1。

一个立方体的两个正交投影显示为蓝色，这个立方体相对于浮雕面呈现任意角度。该图显示的是构建一个点的两种方式。所有其余的点都以相同方法构建。

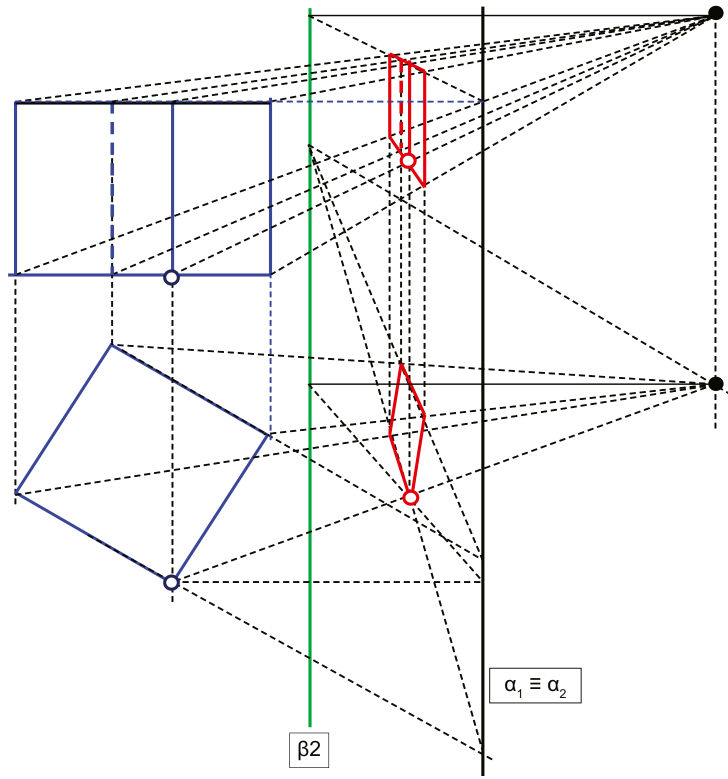

图3.1.1

所得到的图像就是原始立方体在浮雕空间中的两个正交投影（显示为红色）。像普通图纸那样，这些投影图可以用于把所描绘的对象用某种材料制成。

与平面图像相比，浮雕图像对观察者与空间的相对位置变化更敏感。为一视点建造的浮雕，从另一视点来看，可能根本不会被视为有意义的图像。出于这个原因，只有当预计从靠近所选视点的位置观看浮雕，从该视点构建浮雕图像才是可接受的。

如果浮雕的范围很大（例如，楣板），那么千万不能把唯一视点用于制造浮雕图像。在这种情况下，在沿楣板的轴线方向应该有一组视点用于制造浮雕图像，视点离图像的距离必须符合实际观察距离。如果观察者将会沿着图像的垂直方向运动，那么这组视点要形成一个平行于图像平面的平面。

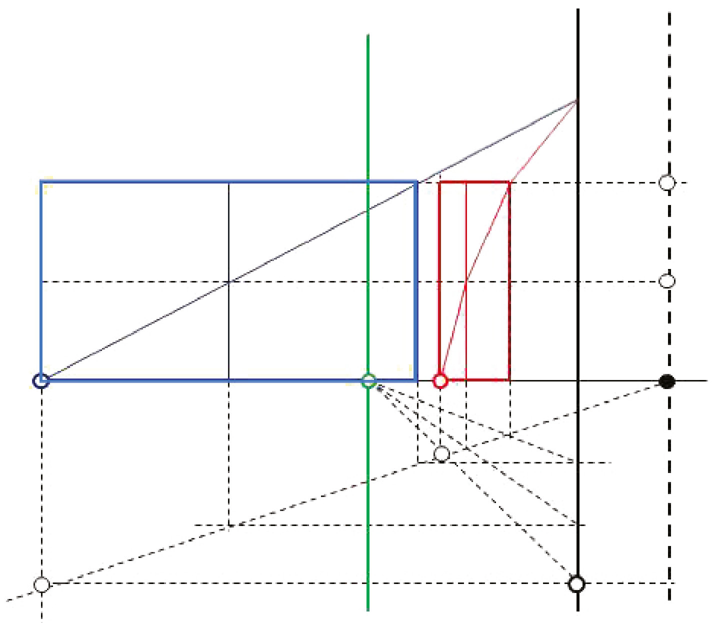

图3.1.2

图3.1.2显示的是在平面上构建此类浮雕图像的方法。相等平面显示为黑色粗线，极限平面显示为绿色。成像物体显示为蓝色，其浮雕图像显示为红色。一组视点（视线）的位置显示为加粗的虚线。

使用这种构造方法，实点和透视点始终位于垂直于相等平面的直线上。用于确定透视点位置的视点决定于此垂线与视线的交点处。沿深度方向，得出这一点的算法类似于图3.1.1所示的算法。不同之处在于，所得出的一个点沿着与相等平面平行的方向被投影到垂线上，这样可得出所求点。所有其余的点都以相同方法构建。

当使用中心投影法（通过一点投射）时，随着观察者离物体的距离变远，物体全部的三维投影都会有透视收缩。在这个例子中，只沿深度方向，才有透视收缩，物体的宽度和高度保持不变（如果楣板的高度很高，有必要沿高度方向进行透视收缩）。

值得指出的是，使用这种构造方法，只有平行或垂直于相等平面的直线才能保持直线的状态。所有其余的直线都投影成曲线。

图3.1.2显示的是构建矩形浮雕图像的方法。可以看到，这个矩形的垂直中心线并不是其浮雕图像中的中心线。所以，一条对应于其对角线的线也不能处于直线的状态。如图所示，对角线被延伸到与相等平面的相交之处。其对应的曲线在浮雕图像上显示为一条连接4个构成点的折线。如果要使曲线显示更准确，则可以任意增加点数。在实践中，显示直线的曲线部分应该被拉直。

值得注意的是，在这种情况下，浮雕空间是弯曲三维空间的一个明显例子。因此，关于弯曲空间的想法不仅可以应用于科学，还可以应用于艺术。

浮雕图像通常在圆形面、凸面或凹面（花瓶、柱子、壁龛等）上。可从不同的角度感知这些图像。通常甚至要求圆周扫描。一组这样的视点可以形成一条线、一个面，甚至某种立体空间。

原则上，上面讨论的方法适用于所有这些情况。相等平面和极限平面之间围成的浮雕空间随着表面形状产生弯曲变形，构建算法如图3.1.2所示。

3.2.透视舞台背景

构建透视舞台背景的算法与浮雕的完全相似，无需额外的解释。

图3.2.1显示的是一间带有一个圆柱的矩形房间的立体透视舞台背景的正交投影（剖面和平面图）的构建方法。给定的房间显示为蓝色，构建结果以红色突出显示。绘图非常简单，几乎不需要解释。视点S（显示为黑色）大约在观众厅中心处，坐着的观察者眼睛高度处。相等平面与舞台脚灯重合。舞台背景的平面对应于所描绘房间的远墙。

这样，我们有一个投影中心，一个相等平面，以及一对对应平面。因而我们可以在真实空间中的点与透视空间中的点之间建立一对一的对应关系。

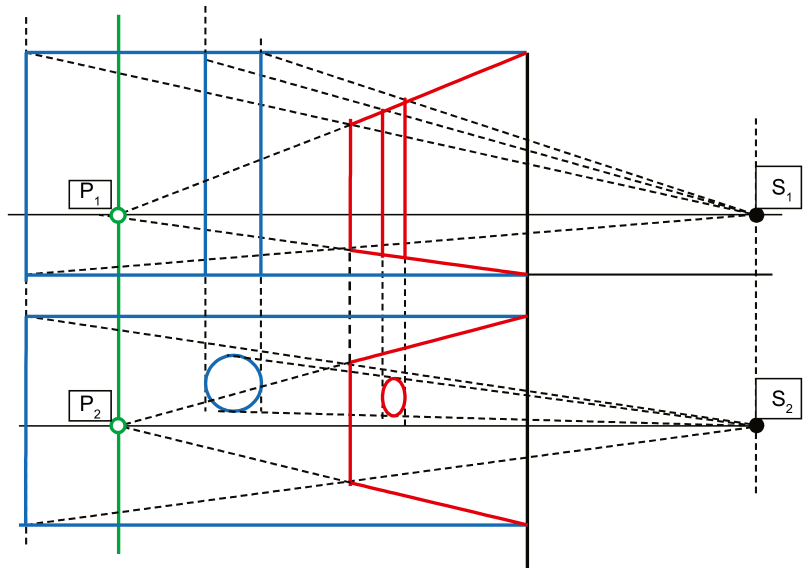

图3.2.1

通过空间透视变换，平行六面体形式的房间变成了四面体截棱锥。该锥体的测棱延长线交点（顶点）是透视舞台背景的主灭点P。真实空间中的该点对应于一个无穷远点。通过主点的垂直平面是极限平面（显示为绿色）。舞台空间中的极限平面对应于现实空间中的无穷远平面。

在原始（真实）房间（如图中以蓝色突出显示）里有一个圆形柱。在透视舞台背景中它对应于一个椭圆柱体。

主点的位置决定于所选择的视点和舞台的深度。如果舞台布景所描绘的不是有限空间的房间或大厅，而是一望无际的风景，那么主点应该被放置在舞台背景的平面上。

如上所述，与平面透视图相比，立体透视图对观察者的位置更敏感。

对于极其靠近所选视点的观察者来说，几乎不可能从视觉上将现实与其立体透视图像区分开来。

但糟糕的是，不可能把所有的观察者都放在同一视点附近。观察者离这个点越远，布景的透视效果就越不明显，透视投影失真看起来就越不自然。

出于这个原因，并不总是必须采用全封闭式构建方法，但有必要根据观众厅和舞台的大小及形状进行调整。

一种这样的解决方案可能是针对多个视点构建的折衷透视。这种构造的算法在于从多个视点构建图像，然后凭着这种或那种参数得到某种平均图像。后者完全取决于艺术家的知识、经验和才能。

IV.非线性透视

我们不但可以在平面上构建透视图像，而且还可以在任何其他表面上构建透视图。在这种情况下，直线投射到画面上，不一定投影成直线，而是由于表面形状不同，也会呈现出最奇异的轮廓。

这种图像的一个例子是灯光秀，将建筑物的外墙当做投影的幕布。建筑物的外墙通常具有非常复杂的表面，但是如果观察者坐在靠近投影机的位置上，那么外墙的形状无关紧要，从视觉上看，图像仿佛被投影到平面上。观察者离投影中心越远，失真就越明显。跟立体透视一样，相较于平面线性透视，非线性透视对观察者的位置更敏感。

在大多数情况下，在构建非线性透视图时，圆柱体和球体的表面（例如，环形全景图、圆屋顶、天文馆）被用作图片平面。在所有情况下，都假定观察者将从一定视点观察这些图像。

构造非线性透视图的原理跟构造线性透视图一样，都是得出投影直线与图片平面的交点。这些点的集合形成图像。

图4.1显示的是在圆柱形的图片平面上，利用二正交投影构建透视图像的方法。

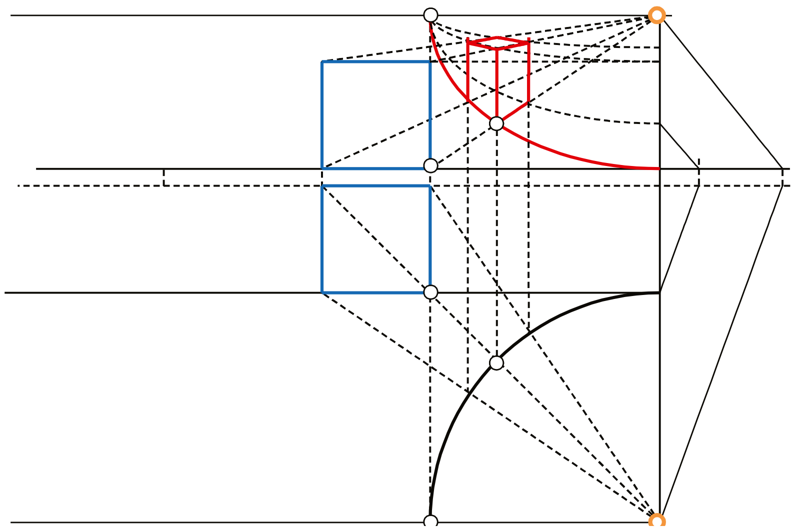

图4.1

如有必要，可以把圆柱形表面展开成平面。在球面上构建透视图的方法相对复杂一些，因为需要多次计算直线与球面的交点。

在平面图片上，通过非线性线束投影方法也可以构成非线性透视图。从水下看世界时可以看到这样的图像。

V.平面结构和立体结构

5.1.平面结构

18世纪，莱昂哈德·欧拉证明了一个定理，根据该定理，对于任何简单多面体，如果其顶点数为V个，棱边数为E条，面数为F个，那么以下等式成立：

$$V+F-E=2 \tag{5.1.1}$$

为了证明这一点，欧拉剪掉了其中一个面，并采用拓扑法使剩下的部分与该面处的轮廓面相重合（或者把剩下的部分投影到该面上）。然后所构成的平面多面体网格被划分为若干三角形。对于三角形，以下等式成立：

$$V+F-E=1 \tag{5.1.2}$$

将任意数量的三角形添加到给定三角形时，顶点和面的数量每一步都比上一步增加一个单位值，棱的数量每一步比上一步多两个。如果从三角形的平面网格中一个一个地删除三角形，那么顶点和面的数量每一步比上一步少一个，棱的数量每一步比上一步少两个。因此，等式（5.1.2）保持不变，并且对任何平面三角形网格都成立。

如果在计算平面网格的面数时，将该网格周围的外部区域视为另一个面，那么可直接满足等式（5.1.1）。

况且，在这种情况下，公式（5.1.1）不仅对于由面组成的网格成立，而且对于任何包含至少一个顶点的平面连通结构（连通图）也成立。

如果图由一个顶点组成，那么V=1，E=0，F=1，由此得出结论是：1+1–0=2。通过向该顶点添加任意数量的顶点、棱和面，可以很容易确定等式始终为真。

为了方便起见，公式（5.1.1）可表示如下：

$$(V+F)=(E+2)=Eu \qquad (5.1.3)$$

其中：Eu是本图的一种特殊的数值（欧拉数）。

图5.1.1显示的是一个具有7个顶点、9条棱和4个面（包括外部的面在内）的图。此外，该图显示不形成面的棱（树、分支），连接同一对顶点的棱（多个），以及闭合于一个顶点的棱（环路）。尽管如此，以下等式仍然成立：7+4=9+2=11。

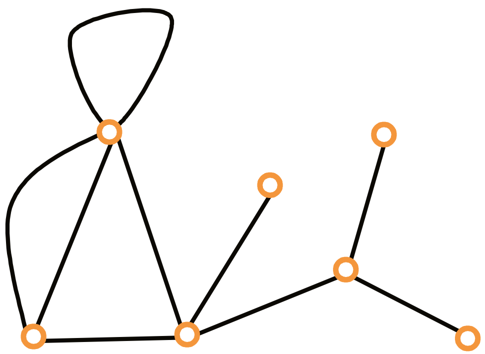

图5.1.1

任何平面结构（无论是公寓平面图、城市总体平面图、交通网络、艺术构图等等）都可以被认为是一种平面图，等式（5.1.3）始终成立。

让我们以2019年圣彼得堡地铁线路图为例。其中包括5条线路、7个换乘站和9个终点站（如图5.1.2所示）。

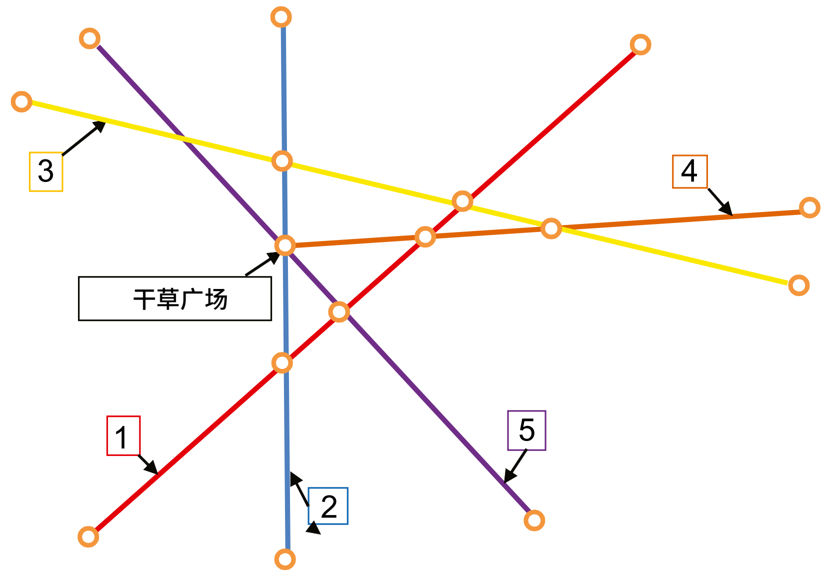

图5.1.2

为简化计算，不考虑中间站。该结构包括16个顶点（站）、19条棱（一条棱是连接两个顶点的线）和5个面（包括外部的面在内）。将这些值代入公式（5.1.3），我们就得出：16+5=19+2=21。请注意，第3条线路和第5条线路（分别显示为黄色和紫色）没有公共换乘站，所以两者没有形成顶点和面。

一眼就看得很清楚，再补充任意数量的线路、中间站和换乘站，等式（5.1.3）仍成立。

5.2.立体结构

上述方法也可以用于三维空间结构。在这种情况下，除了顶点V、棱E、面F以外，还有一个补充的图像是空间P，又称立体。

最简单的空间物体是四面体，其中V=4，E=6，F=4。四面体是一个立体图形，将三维空间分为两个区域，其中有内部和外部。如果同时考虑这两个空间，那么对于四面体，就像对任何简单的多面体一样，P=2。

那么公式（5.1.3）可表示如下：

$$(V+F)=(P+E)=Eu \qquad (5.2.1)$$

对于四面体，我们可得出：(4+4)=(2+6)=8。任何简单的多面体都可被划分为若干四面体，无论如何，等式（5.2.1）仍然成立。

例如，一个立方体有8个顶点、12条棱、6个面和2个空间（内部和外部）。将这些值代入公式（5.2.1），我们就得出：(8+6)=(2+12)=14。

如果我们把多面体看成是一个由顶点、棱、面和空间组成的空间图，那么每次这些元素的删除或添加都可以很容易证明方程（5.2.1）保持不变。因此，本公式不仅对于多面体成立，而且对任何三维空间连通结构（连通图）也成立。

图5.2.1显示的是一个由四面体（1）组成的空间图，其中有两条棱（分枝）（2）连接到该四面体；还有两个不形成空间但形成棱的表面，其中连接一个顶点的表面是一个片子（3），连接一条棱的表面是一个翼（4）；三个形成空间但不形成棱的表面：其中一个由一个顶点组成封闭表面是一个泡子（3），一个由一条棱组成封闭表面是一个袋子（6），一个由一个面组成封闭表面是一个凸圆（7）。在图中，点状线是表面的包络线，不形成棱。

对本图来说，V=6，E=10，F=9，P=5。将这些值代入公式（5.2.1），我们就得出：(6+9)=(10+5)=15。

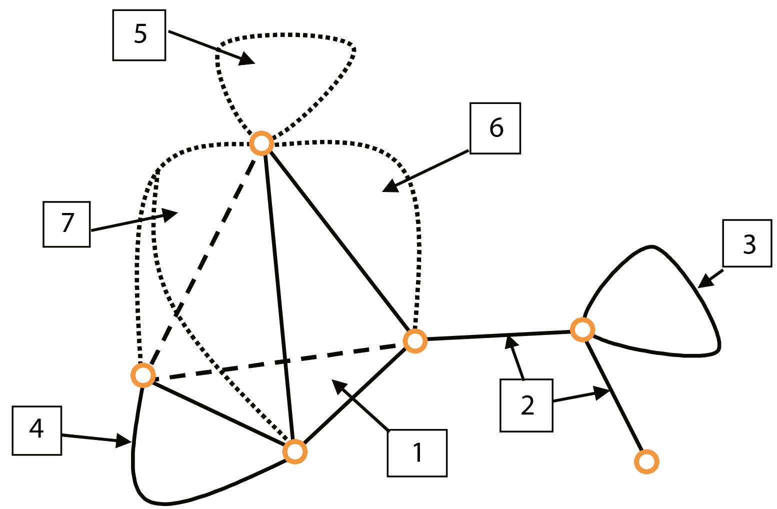

图5.2.1

有趣的是，公式（5.2.1）对于任何与三维空间相关的图都是成立的，即使它不形成空间也成立。

例如，如果三维图由一个顶点组成，那么V=1，E=0，F=0，P=0，由此得出：(1+0)=(1+0)=1，依此类推。

值得一提的是，广义形式的欧拉公式在任何n维空间中都是成立的。

上述空间结构的特性也可应用于实践。图5.2.2显示的是一个由水平面（楼板）划分为两层的立体矩形物体（例如建筑物）的轴测投影。上层被一个垂直平面（墙）分成两部分。

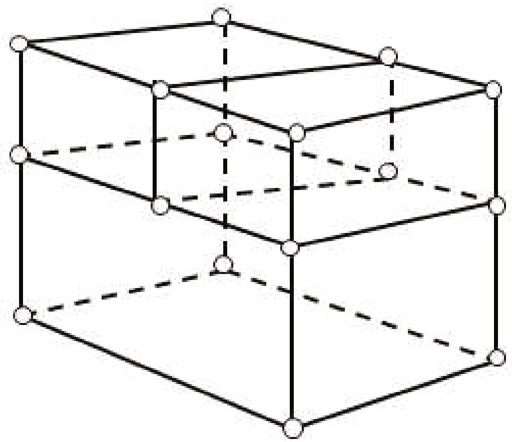

图5.2.2

如果我们把所得出的结构看成是一个由16个顶点、28条棱、16个面和4个空间组成的空间图（三维图），那么将这些值代入公式（5.2.1），我们就得出：16+16=28+4=32。

平面结构和三维结构的上述特性可以用于构造具有预定特性的平面和三维组合物。

5.3.四色定理

对地图着色时，为了便于理解，要求相邻的国家颜色不同。在制作地图的过程中，突然发现每幅地图都可以用4种颜色着色。这一发现的结果是所谓的四色定理。根据这一定理，任何平面规划结构图都可以只用四种颜色着色，使得所有邻接区域（有共同边界的区域）着上不同的颜色。

平面上的三个任意点由任何一组互不相交的线（例如，直线）连接后，会形成一个闭合的轮廓。这种轮廓将平面分为两个区域——内部和外部区域。在平面上，第四点不共线的话，那就位于外部区域或

内部区域。如果我们把所有4个点都相互连接，那么我们就会构建一个由3个点、6条线和4个区域（包括外部区域在内）组成的结构（如图5.3.1所示）。

在图中，这种结构以黑色突出显示。很显然，在平面上，我们可把不多于四的点用一组互不相交的线连接起来。如果我们将三维对偶原则应用于这种构造，其中一个平面（区域）对应于一个点，一条线对应于一条线，我们会得到一个由四个相互相邻的区域（外部区域不算）组成的对偶图。因此，在平面上，顶多可以有四个相互相邻的区域，四种颜色足以对任何平面组合物进行着色。

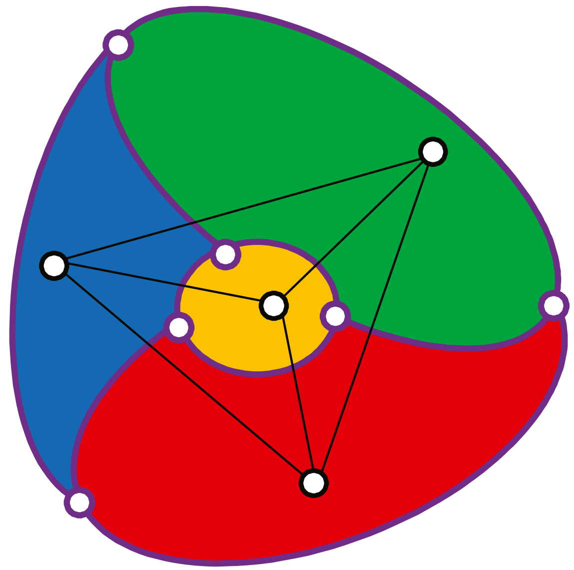

图5.3.1

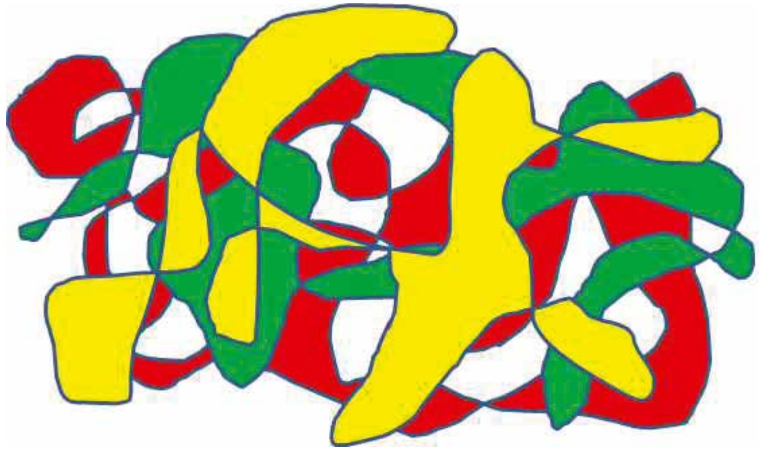

图5.3.2

图5.2.3显示的是一个平面上的抽象构图，用4种颜色（白、红、绿、黄）涂色，相邻区域颜色不同。

熟悉这个定理，艺术家就会预见，四种颜色足以对任何平面组合物进行着色（最大的数量肯定是无穷无尽的）。

参考书目

1、亚历山大罗夫 P. S. 集合论和普通拓扑学概要。莫斯科：科学，1977年，368页

2、瓦利科夫 K. I. 建模理论概要。列宁格勒：列宁格勒建筑工程学院,1974年，86页

3、沃罗日希夫 Ya. S. 对偶几何变换//土木工程师通报。圣彼得堡：圣彼得堡国立建筑工程大学，2014/1(42)，2月，127–135页

4、沃罗日希夫 Ya. S. 透视图作为三维共线的特例与透视基本定理//科学著作/列宾学院，第34期：艺术教育问题。圣彼得堡：列宾学院，2015年，88–98页

5、沃罗日希夫 Ya. S. 负维空间，交集作为一种通用唯一的位置关系。圣彼得堡：阿斯特利安，2011年，36页

6、沃罗日希夫Ya. S. 浮雕与透视舞台背景//科学著作/列宾学院，第38期：艺术教育问题。圣彼得堡：列宾学院，2016年，86–97页

7、格拉戈列夫 N. A. 投影几何学。莫斯科：高等学府，1963年，344页

8、克利穆欣 A. G. 画法几何学。莫斯科：建筑术-C，2007年，336页
9、科罗特基 V. A. 锥线投影构造法：教科书。车里亚宾斯科：南乌拉尔国立大学出版中心，2010年，94页
10、马卡罗娃 M. I. 透视画法。莫斯科：学术设计，2009年，477页
11、索博列夫 N. A. 一般图像理论。莫斯科：莫斯科建筑学院，2014年，672页

目录

序言		3
I.	关于投影图像和几何集合的一般概念	6
II.	平面上的投影图	44
III.	空间中投影图像	76
IV.	非线性透视	87
V.	平面结构和立体结构	89
参考书目		97

俄罗斯联邦文化部
圣彼得堡列宾美术学院

雅罗斯拉夫·谢尔盖耶维奇·沃罗日希夫

透视及其他投影图像构建的理论与实践

方法论指南

第一卷